

أنجيم ANJIM

Hard_equation

في الرياضيات

ثانوي 3AS

جبر تحليل هندسة

- ملخص عملي للدرس .
- تمارين محلولة للتطبيق .
- تمارين مقترحة للتدريب .
- مواضيع بكالوريا أجنبية محلولة.
- دليل إستعمال الآلة الحاسبة المبرمجة .

رياضيات
تقني رياضي
علوم تجريبية

إعداد : الأستاذ تزقغين مصطفى



وفقا للبرنامج الجديد لوزارة التربية الوطنية



جبر تحليل هندسة

رياضيات

تقني رياضي

علوم تجريبية

- ملخص عملي للدرس .
- تمارين محلولة للتطبيق .
- تمارين مقترحة للتدريب .
- مواضيع بكالوريا أجنبية محلولة.
- دليل إستعمال الآلة الحاسبة المبرمجة .

إعداد : الأستاذ تزقغين مصطفى



وفقا للبرنامج الجديد لوزارة التربية الوطنية

دار نزهة الألباب

لنشر الكتب ووسائل

العلم و المعرفة

ساحة العقيد لطفي غرداية

هاتف فاكس: 029.88.35.49

هاتف Tel : 029.89.95.80

الإيداع القانوني

3367/2007

ISBN 978-9961-6615-7-5

تصميم الغلاف

CYCLOPEDIA

الفريق التقني لدار نزهة الألباب



بسم الله الرحمن الرحيم

عنوان الكتاب	أنجيم في الرياضيات 3 ثانوي
إعداد	الأستاذ : تزقغين مصطفى

مـــقدمة

يتوجّه هذا الكتاب إلى تلاميذ أقسام السنة الثالثة ثانوي، بشعبه العلمية، ويدخل في إطار سلسلة جديدة تدعى ((أنجيم)) — المجتهد —. وقد أُعدّ الكتاب وفقا للبرنامج الرسمي الجديد لوزارة التربية الوطنية والذي سيشرع في تطبيقه مع هذه الأقسام ابتداء من هذه السنة الدراسية 2008/2007.

أهداف الكتاب

- يمكّن التلميذ من الحصول على معلومات محدّدة وملّخصة.
- يساعد التلميذ على تطبيق المعلومات التي تحصّل عليها في القسم.
- يدرّب التلميذ على الاستيعاب الحسن والترسيخ الجيد للمعلومات.
- يحضّر التلميذ لاجتياز امتحان البكـــالوريا.

محتوى الكتاب

- يحتوي الفصل الأول من هذا الكتاب على ملخّصات للمحاور العشرة التي يتضمّنها البرنامج الدراسي لمادة الرياضيات. يُقدّم الملخّص على شكل: تعريف- مبرهنة -- للحفظ -- نتائج . ويكـــون داخـــل إطـــــار، يحدّد للتلميذ بالضبط بداية ونهاية المعلومة.
- يُتبع كل محور بخمسة تمرينات تطبيقية محلولة.
- في نهاية كل محور يجد التلميذ عشرة تمرينات للتدريب تتضمن مهارات المحور.
- خُصّص الجزء الثاني من الكتاب لبكالوريا (2007/2006/2005) لدول أجنبية، يتماشـــى برنامجهـــا الدراسي في مادة الرياضيات وَ البرنامج الرسمي الجديد لوزارة التربية الوطنية الجزائرية.
- يتبع كل موضوع بمقترح للحل.
- في نهاية الكتاب، يجد التلميذ بعض الدساتير الأكثر استعمالا في هذا البرنامج.
- في نهاية الكتاب، يجد التلميذ بعض التعليمات الخاصة باستعمال الحاسبة المبرمجة *TI - 83plus*.

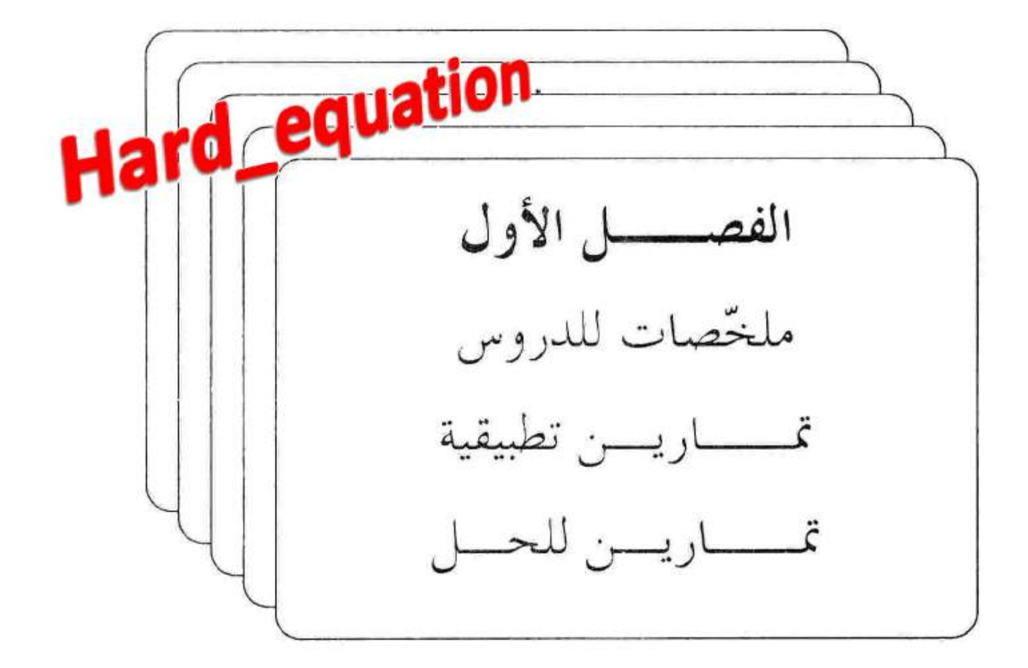
أعزائي التلاميذ: تجسيدا لتطلعاتكم للنجاح في نهاية السنة الدراسية، أضع بين أيديكم هذا الكتاب، الـــذي يأتي ليساعدكم ويذلّل بعض الصعوبات التي ربما تعتريكم خلال تحضيراتكم للامتحان.

أرجو لك عزيزي التلميذ التوفيق في استعمال هذا الكتاب. وتجدر الإشارة هنا إلى ضرورة حل التمرين من طرف التلميذ قبل الإطلاع على الحل. **((المهم في التمرين هو حلّه والأهم هو التفكير في حلّه.))**

هذا الكتاب، يبقى إلى ما بعد البكالوريا كمرجع للطالب، كونه يتضمّن ملخّصات لمفاهيم أساسية في البرنامج العام للرياضيات.

الأستاذ: تزقغين مصطفى

ثانوية مفدي زكرياء- بني يزقن▪ ولاية غرداية //// العنوان الاكتروني :mtizmath@gmail.com



1- الحســـــــاب

ما يجب أن يعرف:------------------------------

★ قابلية القسمة في $\mathbb{Z}$.

◆ قاسم ومضاعف عدد صحيح:

تعريف

a و b عددان صحيحان.

نقول أن b **يقسم** a إذا وجد عدد صحيح k بحيث: $a = kb$ ونرمز بـ: $b \mid a$.

نقول أيضا أن: العدد b **قاسم** للعدد a. وكذلك أن: العدد a **مضاعف** للعدد b.

◆ خواص.

- كل عدد صحيح هو قاسم للعدد 0، و 0 هو المضاعف الوحيد للعدد 0.
- مضاعفات عدد صحيح غير معلوم n هي الأعداد من الشكل kn حيث k عدد صحيح، ونرمز لمجموعة هذه المضاعفات بـ: $n\mathbb{Z}$. ولـــدينا $0\mathbb{Z} = \{0\}$
- من أجل كل عدد صحيح a، العدد 1 هو قاسم للعدد a.
- كل عدد صحيح a يقبل على الأقل القواسم: -1، 1، $-a$، a.
- من أجل كل عددين صحيحين a و b. إذا كان b يقسم a و a يقسم b فإن $a = b$ أو $a = -b$.
- a، b، c أعداد صحيحة:
  - إذا كان (a يقسم b) و (b يقسم c) فـــإن (a يقسم c)
  - إذا كان (a يقسم b) فـــإن (a يقسم bc)
  - إذا كان (a يقسم b) فـــإن (ac يقسم bc)
  - إذا كان (a يقسم b) و (a يقسم c) فـــإن (a يقسم $b + c$) و (a يقسم $b - c$)

- إذا كان (a يقسم b) و (a يقسم c) فـإن (a يقسم $kb+k'c$) حيث k و k' عددان صحيحان.

◆ القسمة الإقليدية في N.

تعريف

a و b عددان طبيعيان، حيث b يختلف عن الصفر.
توجد ثنائية وحيدة $(q;r)$ من الأعداد الطبيعية حيث: $a=bq+r$ و $0\le r<b$.
عملية إيجاد الثنائية $(q;r)$ انطلاقا من a و b تدعى القسمة الإقليدية للعدد a على العدد b. q يدعى حاصل القسمة و r يدعى باقي القسمة.

للحفظ

b يقسم a إذا وفقط إذا كان في القسمة الإقليدية للعدد a على العدد b، باقي القسمة r معدوم.
عند قسمة العدد الطبيعي a على العدد الطبيعي غير المعدوم b يكون باقي القسمة إما 0، إما 1 إما 2 إما... إما $(b-1)$.

◆ الموافقة العددية في Z.

تعريف

a و b عددان صحيحان، و n عدد طبيعي.
نقول أن العدد a يوافق العدد b بترديد n إذا وفقط إذا كان العدد $(a-b)$ مضاعف n ونرمز: $a\equiv b[n]$

للحفظ

a، b، c، أعداد صحيحة و n عدد طبيعي غير معدوم.

- $a\equiv a[n]$ (الانعكاسية)
- إذا كان $a\equiv b[n]$ فإن $b\equiv a[n]$ (التناظرية). نقول أن a و b متوافقان.
- إذا كان ($a\equiv b[n]$ و $b\equiv c[n]$) فـإن $a\equiv c[n]$ (المتعدية).
- $a\equiv 0[n]$ يكافئ (a يقبل القسمة على n).

للحفظ

a، b، a'، b' أعداد صحيحة و n، m عددان طبيعيان غير معدومين.

- $a\equiv b[n]$ يكافئ $(a+a')\equiv(b+a')[n]$.
- إذا كان ($a\equiv b[n]$ و $a'\equiv b'[n]$) فـإن $a+a'\equiv b+b'[n]$.
- إذا كان $a\equiv b[n]$ فـإن $aa'\equiv ba'[n]$.
- إذا كان ($a\equiv b[n]$ و $a'\equiv b'[n]$) فإن $a\times a'\equiv b\times b'[n]$.
- إذا كان $a\equiv b[n]$ فـإن $a^m\equiv b^m[n]$.

◆ **القاسم المشترك الأكبر $PGCD$**

تعريف

a و b عددان طبيعيان غير معدومين.
القاسم المشترك الأكبر للعددين a و b هو أكبر عنصر في مجموعة القواسم المشتركة لهذين العددين. يرمز له $PGCD(a;b)$

مبرهنة1

إذا كان r هو الباقي في القسمة الإقليدية للعدد الطبيعي غير المعدوم a على العدد الطبيعي غير المعدوم b وكان $r\neq 0$، فإن مجموعة القواسم المشتركة للعددين a و b هي مجموعة القواسم المشتركة للعددين b و r.

للحفظ

a، b و c أعداد طبيعية غير معدومة.

- $PGCD(a;b;c)=PGCD(PGCD(a;b);c)$
- $PGCD(a;b)=b$ يكافئ b يقسم a.
- $PGCD(a\times c;b\times c)=c\times PGCD(a;b)$
- $PGCD(a;b)=1$ يكافئ (a و b أوليان فيما بينهما).
- $PGCD(a;b)=d$ يكافئ ($\frac{a}{d}$ و $\frac{b}{d}$ أوليان فيما بينهما)
- مجموعة القواسم المشتركة للعددين a و b هي مجموعة قواسم العدد $PGCD(a;b)$.

خوارزمية إقليدس

a وَ b عددان طبيعيان غير معدومين حيث . $b<a$ و b لا يقسم a.

نسمي q_1 وَ r_1 الحاصل والباقي في القسمة الإقليدية للعدد a على العدد b.

نجري قسمة أقليدية للعدد b على العدد r_1، وهكذا إلى أن نصل إلى باق معدوم. فنكتب القسمات الإقليدية المتتابعة كما يلي:

$$a=bq_1+r_1 \qquad (0<r_1<b)$$
$$b=r_1q_2+r_2 \qquad (0<r_2<r_1)$$
$$r_1=r_2q_3+r_3 \qquad (0<r_3<r_2)$$
$$\dots \quad \dots \quad \dots \qquad \dots \quad \dots \quad \dots$$
$$\dots \quad \dots \quad \dots \qquad \dots \quad \dots \quad \dots$$
$$r_{p-1}=r_pq_{p+1}+0$$

هذه القسمات الإقليدية المتتابعة تدعى **خوارزمية إقليدس**. المتتالية (r_n) موجبة ومتناقصة تماما.أصغر حد لها غير معدوم هو $PGCD(a;b)$.

مبرهنة2- بيزو-

عددان طبيعيان غير معدومين a و b، أوليان فيما بينهما إذا وفقط إذا وجد عددان صحيحان α وَ β بحيث: $a\alpha+b\beta=1$.

مبرهنة3- غوص-

a، b وَ c أعداد طبيعية غير معدومة. **إذا كان** a يقسم $b\times c$ وكان a وَ b أوليان فيما بينهما، **فـــإن** a يقسم c.

للحفظ

- **إذا كان** عدد طبيعي a يقبل القسمة على عددين طبيعيين أوليين فيما بينهما b وَ c **فـــإن** العدد a يقبل القسمة على bc.
- **إذا كان** $PGCD(a;b)=d$ **فـــإنه** يوجد عددان صحيحان α و β بحيث: $a\alpha+b\beta=d$.
- عدد طبيعي أولي مع جداء عددين طبيعيين **إذا وفـــقط إذا كان** أولي مع كل عامل من الجداء.

◆ المضاعف المشترك الأصغر $PPCM$

تعريف a وَ b عددان طبيعيان غير معدومين.

المضاعف المشترك الأصغر للعددين a وَ b هو أصغر عنصر غير معدوم في مجموعة المضاعفات المشتركة لهذين العددين. يرمز له $PPCM(a;b)$.

خـــــواص

a، b وَ c أعداد طبيعية غير معدومة.

- $PPCM(a;b;c)=PPCM(PPCM(a;b);c)$.
- $PPCM(a;b)=a$ معناه a مضاعف b.
- $PPCM(a\times c;b\times c)=c\times PPCM(a;b)$.
- $PPCM(a;b)=ab$ معناه (a وَ b أوليان فيما بينهما).
- $PGCD(a;b)\times PPCM(a;b)=ab$.
- $PPCM(a;b)=m$ معناه($\frac{m}{a}$ وَ $\frac{m}{b}$ أوليان فيما بينهما).
- مجموعة المضاعفات المشتركة للعددين a وَ b هي مجموعة مضاعفات العدد $PPCM(a;b)$.

◆ الأعداد الأولية

تعريف العدد طبيعي p أولي **إذا وفقط إذا** قبل قاسمان بالضبط وهما: 1 وَ p.

للحفظ

- العددان 0 وَ 1 غير أوليين.
- العدد 2 هو أول عدد طبيعي أولي وهو الطبيعي الزوجي الأولي الوحيد.
- إذا كان p عدد أولي فهو أولي مع الأعداد 2، 3،....، $p-1$.
- إذا كان عدد أولي يقسم جدا عوامل فهو يقسم أحد هذه العوامل.
- كل عدد طبيعي أكبر من 1 يقبل على الأقل قاسما أولياً.
- كل عدد طبيعي غير أولي n وأكبر من 1 يقبل على الأقل قاسما أوليا p حيث: $p^2\le n$.

متتالية الأعداد الأولية غير منتهية.

تحليل عدد طبيعي إلى جدا عوامل أولية.

مبرهنة4

كل عدد طبيعي غير أولي n وأكبر من 1، **يقبل** تحليلا **وحيدا** إلى جدا عوامل أولية. ويكتب بالشكل: $n = p_1^{a_1} \times p_2^{a_2} \times ..... \times p_m^{a_m}$

حيث: p_1، p_2، ...، p_m أعداد أولية متمايزة وَ a_1، a_2، ...، a_m أعداد طبيعية غير معدومة.(m عدد طبيعي).

- **التعداد**

مبرهنة5

x عدد طبيعي أكبر من 1.

كل عدد طبيعي n يكتب بطريقة واحدة وواحدة فقط على الشكل:

$$n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_p x^p$$

حيث: a_0، a_1، a_2، ...، a_p أعداد طبيعية تحقق: $a_p \neq 0$ وَ $0 \le a_h < x$ من أجل كل عدد طبيعي h حيث: $h < p$

هذه الكتابة للعدد n تدعى نشر العدد n وفق الأساس x. ونرمز: $n = \overline{a_p ... a_2 a_1 a_0}^{(x)}$

للحفظ

- كل عدد طبيعي أصغر من الأساس x يدعى رقماً في الأساس x.
- في نظام التعداد ذي الأساس 2 الرقمان هما: 0 ، 1.
- في نظام التعداد ذي الأساس 10 الأرقام هي: 0، 1، 2 ... 9.
- في نظام التعداد ذي الأساس 11 الأرقام هي: 0، 1، 2 ... 9، α.(α يمثل 10).
- في نظام التعداد ذي الأساس 12 الأرقام هي: 0 ، 1، 2 ... 9، α، β. (β يمثل 11).

طريقة

اكتب العدد 485 في النظام ذي الأساس 2 ثم الأساس 5 ثم الأساس 12.

$485 = 2 \times 242 + \mathbf{1}$
$242 = 2 \times 121 + \mathbf{0}$
$121 = 2 \times 60 + \mathbf{1}$
$60 = 2 \times 30 + \mathbf{0}$
$30 = 2 \times 15 + \mathbf{0}$
$15 = 2 \times 7 + \mathbf{1}$
$7 = 2 \times 3 + \mathbf{1}$
$3 = 2 \times \mathbf{1} + \mathbf{1}$

/

$485 = 5 \times 97 + \mathbf{0}$
$97 = 5 \times 19 + \mathbf{2}$
$19 = 5 \times \mathbf{3} + \mathbf{4}$

/

$485 = 12 \times 40 + \mathbf{5}$
$40 = 12 \times \mathbf{3} + \mathbf{4}$

أي $485 = \overline{111100101}^{(2)}$ ، أي $485 = \overline{3420}^{(5)}$ ، أي $485 = \overline{345}^{(12)}$

طريقة

انشر العدد $\overline{1\alpha 52}^{(11)}$ في أساسه ثم اكتبه في النظام ذي الأساس 7.

$$\overline{1\alpha 52}^{(11)} = 2 \times 11^0 + 5 \times 11^1 + 10 \times 11^2 + 1 \times 11^3 = 2598$$

ولدينا :

$2598 = 7 \times 371 + \mathbf{1}$
$371 = 7 \times 53 + \mathbf{0}$
$53 = 7 \times 7 + \mathbf{4}$
$7 = 7 \times \mathbf{1} + \mathbf{0}$

أي: $2598 = \overline{10401}^{(7)} = \overline{1\alpha 52}^{(11)}$

العدد 7431 مكتوب في الأساس 8، أكتب نفس العدد في الأساس 2.

$$7431 = 1 \times 8^0 + 3 \times 8^1 + 4 \times 8^2 + 7 \times 8^3$$
$$= 1 + (1+2) \times 2^3 + 2^2 \times 2^6 + (1+2+2^2) \times 2^9$$
$$= 1 + 2^3 + 2^4 + 2^8 + 2^9 + 2^{10} + 2^{11}$$
$$= 1 \times 2^0 + 0 \times 2^1 + 0 \times 2^2 + 1 \times 2^3 + 1 \times 2^4 +$$
$$+ 0 \times 2^5 + 0 \times 2^6 + 0 \times 2^7 + 1 \times 2^8 + 1 \times 2^9 + 1 \times 2^{10} + 1 \times 2^{11}$$

أي: $\overline{7431}^{(8)} = \overline{111100011001}^{(2)}$

تمارين محلولة

الموافقة العددية

1 عيّن الأعداد الطبيعية n بحيث يكون العدد $2^n - 1$ يقبل القسمة على 17.

الحل: ندرس حسب قيم العدد الطبيعي n البواقي الممكنة في القسمة الإقليدية للعدد 2^n على 17.

نجد: $2^0 \equiv 1[17]$ ، $2^1 \equiv 2[17]$ ، $2^2 \equiv 4[17]$ ، $2^3 \equiv 8[17]$ ، $2^4 \equiv 16[17]$ ، $2^5 \equiv 15[17]$ ، $2^6 \equiv 13[17]$ ، $2^7 \equiv 9[17]$ ، $2^8 \equiv 1[17]$ ...

من خواص الموافقة ينتج أن البواقي دورية ودورها 8، إذاً: $2^n \equiv 1[17]$ يكافئ أن $n = 8k$ حيث $k \in N$

الموافقة العددية

2 عيّن الباقي في القسمة الإقليدية لـ: 56^{66} على 5 ، 155^{13} على 3 ، 2008^{2007} على 9 ، 2006^{2008} على 2007.

الحل: $56 \equiv 1[5]$ منه $56^{66} \equiv 1^{66}[5]$ أي $56^{66} \equiv 1[5]$ إذاً باقي القسمة الإقليدية للعدد 56^{66} على 5 هو 1.

$155 \equiv 2[3]$ منه $155^{13} \equiv 2^{13}[3]$ إذاً للعددين 155^{13} وَ 2^{13} نفس باقي القسمة على 3.

$2^0 \equiv 1[3]$ ، $2^1 \equiv 2[3]$ ، $2^2 \equiv 1[3]$ من خواص الموافقة ينتج أن البواقي دورية ودورها 2،
ولدينا: $2^{13} = 2^{2\times 6+1}$ فإن $2^{13} \equiv 2[3]$. إذاً باقي القسمة الإقليدية للعدد 155^{13} على 3 هو 2.

$2008 \equiv 1[9]$ منه $2008^{2007} \equiv 1^{2007}[9]$ أي $2008^{2007} \equiv 1[9]$ إذاً باقي القسمة الإقليدية للعدد 2008^{2007} على 9 هو 1.

$2006^0 \equiv 1[2007]$ ، $2006 \equiv 2006[2007]$ ، $2006^2 \equiv 2[2007]$ ، $2006^3 \equiv 0[2007]$ ...

من خواص الموافقة ينتج أنه: من أجل كل عدد طبيعي n أكبر من 2 لدينا:

$2006^n \equiv 0[2007]$ وبالتالي باقي قسمة 2006^{2008} على 2007 هو 0.

خوارزمية اقليدس- مبرهنتي بيزو وَ غوص

3 بيّن أن المعادلة $53x + 25y = 1$ تقبل حلولا في $Z \times Z$، ثم حل هذه المعادلة.

الحل: باستعمال خوارزمية أقليدس نجد: $53 = 25 \times 2 + 3$ و $25 = 3 \times 8 + 1$
وَ $3 = 1 \times 3 + 0$ إذاً آخر باقي غير معدوم في هذه القسمات هو 1. يعني
$PGCD(53;25) = 1$ (يمكن ترتيب العمليات في جدول)

أي العددان 53 و 25 أوليان فيما بينهما. وبالتالي حسب بيزو توجد على الأقل ثنائية $(\alpha;\beta)$ من $Z \times Z$ تحقق المعادلة $53\alpha + 25\beta = 1$. هذه الثنائية $(\alpha;\beta)$ تعتبر حلا للمعادلة المطلوبة.

(ثنائية بيزو ليست وحيدة)

لحل المعادلة نوجد حلا خاصا باستعمال خوارزمية اقليدس كما يلي: $25 - 3 \times 8 = 1$ أي

$$1 = 25 - (53 - 25 \times 2) \times 8$$

وبالتالي: $53 \times (-8) + 25 \times (17) = 1$ يعني أن الثنائية $(-8;17)$ حلا خاصا للمعادلة.

نوجد إذاً جميع الحلول كما يلي:

من الكتابتين $53x + 25y = 1$ و $53 \times (-8) + 25 \times (17) = 1$ وبالطرح طرف من طرف نحصل على: $53(x+8) = 25(-y+17)$ هذا يعني أن 25 يقسم العدد $53(x+8)$ وبما أن 53 وَ 25 أوليان فيما بينهما(حسب ما سبق) فحسب غوص 25 يقسم $(x+8)$

أي $(x+8) = 25k$ حيث $k \in Z$ إذاً $x = 25k - 8$

لإيجاد قيم y نعوض x بقيمته في المعادلة $53x + 25y = 1$ فنجد بعد الحساب: $y = -53k + 17$

وبالتالي مجموعة حلول المعادلة المطلوبة هي: $\{(25k-8;-53k+17)/k \in Z\}$.

التحليل إلى جدا عوامل أولية

4 أوجد الثنائيات $(x;y)$ من المجموعة $N \times N$ والتي تحقق المعادلة: $x^2 - y^2 = 2^2 \times 23^2$.

الحل: لدينا: $x^2-y^2=2^2\times23^2$ تكافئ $(x-y)(x+y)=2^2\times23^2$ يعني أن كلا من العددين $(x-y)$ وَ $(x+y)$ يقسم العدد $2^2\times23^2$ علما أن: $0<x-y\le x+y$ وَ $(x-y)$ وَ $(x+y)$ زوجيان معا أو فرديان معاً.

نوجد أولاً قواسم العدد $23^2\times2^2$ وهي من الشكل $2^n\times23^m$ حيث: $n\in\{0;1;2\}$ وَ $m\in\{0;1;2\}$ هذه القواسم هي:

$1;\ 2;\ 4;\ 23;\ 46;\ 92;\ 529;\ 1058;\ 2116$ وباستعمال الشرط السابق نحصل على الجملتين التاليتين:

$\begin{cases}x-y=2\\x+y=1058\end{cases}$ أو $\begin{cases}x-y=46\\x+y=46\end{cases}$ وبعد حلّها نجد الثنائيات $(x;y)$ المطلوبة وهي: $(530;528)$ وَ $(46;0)$.

العلاقة بين $PGCD$ وَ $PPMC$

5	أوجد عددين علما أن مجموعهما 581 وحاصل قسمة مضاعفيهما المشترك الأصغر على قاسميهما المشترك الأكبر هو 240.

الحل: نبحث عن عددين a وَ b بحيث: $a+b=581$ وَ

$$PPCM(a;b)=240\times PGCD(a;b)$$

علما أن: $PGCD(a;b)\times PPCM(a;b)=ab$ وأن: $PGCD(a;b)=d$

معناه($\frac{a}{d}$ وَ $\frac{b}{d}$ أوليان فيما بينهما)

فإن الشرط الثاني يكتب: $a'\times b'=240$ وَ $PGCD(a;b)=d$ وَ $a=d\times a'$ وَ $b=d\times b'$ وَ $PGCD(a';b')=1$.

نبحث أولاً عن عددين a' وَ b' بحيث: $d(a'+b')=581$ وَ $a'\times b'=240$ وَ $PGCD(a';b')=1$

الشرط الأول يعطي قيم d الممكنة وهي قواسم 581 الذي يكتب 7×83 إذاً:

$$d\in\{1;7;83;581\}$$

مناقشة: إذا كان $d=581$ فـإن: $a'+b'=1$ وَ $a'\times b'=240$ مستحيل.

إذا كان $d=7$ فـإن: $a'+b'=83$ وَ $a'\times b'=240$ يعني a' و b' حلّي المعادلة: $x^2-83x+240=0$ وبالتالي: $a'=80$ وَ $b'=3$.منه: $a=560$ وَ $b=21$.

إذا كان $d=1$ فـإن: $a'+b'=581$ وَ $a'\times b'=240$ مستحيل.

خلاصة: العددان المطلوبان هما: 560 وَ 21.

التعداد

6	n عدد طبيعي، يكتب في الأساس x بالشكل 1254، ويكتب العدد $2n$ في نفس الأساس x بالشكل 2541 .عيّن x. أكتب العدد n في الأساس 10 ، ثم اكتب العدد $3n$ في الأساس x.

الحل: لدينا: $n=4+5x+2x^2+x^3$ وَ $2n=1+4x+5x^2+2x^3$

تنتج المعادلة التالية: $x^2-6x-7=0$

ذات المجهول الطبيعي x حيث: $x>5$. حلّي المعادلة هما: -1 وَ 7 إذاً $x=7$

$n=\overline{1254}^{(7)}=4+5\times7+2\times7^2+1\times7^3=480$ يعني n يكتب 480 في الأساس 10.

$3n$ يكتب 1440 في الأساس 10 ثم يحوّل إلى الأساس 7.

نجد: $1440=7\times205+\mathbf{5}$ ، $205=7\times29+\mathbf{2}$ ، $29=7\times\mathbf{4}+\mathbf{1}$ أي $3n=\overline{4125}^{(7)}$

تمارين للتدريب

1. القسمة الإقليدية للعدد الطبيعي a على كل من العددين 155 وَ 161 تعطي نفس الحاصل، والباقيان على الترتيب 65 وَ 23. تعرّف على العدد a.

2. ماهي البواقي الممكنة في القسمة الإقليدية لعدد طبيعي فردي على 4؟.

بيّن أنه إذا كان n عدد طبيعي فردي فإذ العدد n^2-1 يقبل القسمة على 8.

3. عيّن البواقي الممكنة في القسمة الإقليدية لمربع عدد صحيح على 8.

عيّن الأعداد الصحيحة n التي تحقق: $(n+3)^2 \equiv 1[8]$.

4. n عدد طبيعي.

1. أوجد حسب قيم العدد n البواقي الممكنة في قسمة العدد 5^n على 13.
2. استنتج أن العدد $2007^{2008}-1$ يقبل القسمة على 13.
3. بيّن أنه من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم، العدد $31^{4n+1}+44^{4n-1}$ يقبل القسمة على 13.

5. بيّن أنه من أجل كل عدد طبيعي n، العددان التاليان أوليان فيما بينهما، في كل حالة:

(1): $n+2$ و $n+3$، (2): $7n+2$ و $4n+1$، (3): $n(2n+1)$ و $n+1$، (4): $2n+1$ و $3n+1$.

6. n عدد طبيعي غير معدوم، نضع: $a=4n+3$ و $b=5n+2$ و $d=PGCD(a;b)$

1. أعط قيمة d في كل حالة من الحالات الثلاث التالية: $n=1$ ، $n=11$، $n=15$.
2. احسب العدد $5a-4b$ واستنتج قيم d الممكنة.
3. عيّن العددين الطبيعيين n و k بحيث: $4n+3=7k$، ثم العددين الطبيعيين n و k' بحيث: $5n+2=7k'$.

7. حل في المجموعة $N\times N$ كلا من المعادلات التالية:

(1): $x^2-y^2=77$، (2): $x^2-y^2=36$، (3): $x^2-y^2=165$، (4): $xy-3y-24=0$.

8. a و b عددان طبيعيان غير معدومين، نضع: $d=PGCD(a;b)$ و $m=PPCM(a;b)$

تعرّف على جميع الثنائيات $(a;b)$ التي تحقق: $m=d^2$ و $d+m=156$ و $a\ge b$.

9. لا يملك نسيم إلاّ قطعاً نقديةً ذات $20DA$ وأوراقاً نقديةً ذات $100DA$. علما أن لديه مبلغ $300DA$. كم قطعة وكم ورقة نقدية لنسيم؟.

10. نضع: $a\in Z$ و $b\in Z^*$

1. نفرض أن $PGCD(a;b)=1$، بيّن باستعمال مبرهنة بيزو أن: $PGCD(a;b^2)=1$ و $PGCD(a^2;b^2)=1$

   واستنتج أن: $PGCD(a;b)=1$ يكافئ $PGCD(a^2;b^2)=1$
2. نعتبر x عدد صحيح.
   - انشر العبارة: $(x^2+x-1)^2$، وحلّل العبارتين: x^2+x-2 و x^2+4x+4.
   - عيّن الأعداد الصحيحة x بحيث يكون الكسر $\dfrac{x^4+2x^3-x^2-2x+1}{x^2+4x+4}$ قابل للاختزال.

2- الدوال العددية

ما يجب أن يعرف:

✱ **عمومـــيات**

في كامل هذا المحور، نتعامل مع الدوال العددية للمتغيّر الحقيقي، يعني دوال تأخذ متغيراتها من جزء في R (تدعى مجموعة البدء)وتضع قيّمها في جزء من R (تدعى مجموعة الوصول).

◆ **مجموعة التعريف**

تعريف: مجموعة تعريف الدالة f هي جزء من مجموعة البدء وتضم الأعداد التي لها صورة في مجموعة الوصول بالدالة f. ونرمز لها: D_f

◆ **التمثيل البياني**

تعريف: في المستوي المنسوب إلى المعلم $(O;\vec{i};\vec{j})$، التمثيل البياني للدالة f هو مجموعة النقط M من المستوي والتي إحداثياتها $(x;y)$ تحقق: $x\in D_f$ و $y=f(x)$ ← **معادلة ديكارتية للتمثيل البياني**

◆ **الشفعية – الدورية**

(الدالة f زوجية) **يعني أنه** (من أجل كل x من D_f : $-x\in D_f$ و $f(-x)=f(x)$)

(الدالة f فردية) **يعني أنه** (من أجل كل x من D_f : $-x\in D_f$ و $f(-x)=-f(x)$)

(الدالة f دورية ودورها p) **يعني أنه** (من أجل كل x من D_f : $(x+p)\in D_f$ و $(x-p)\in D_f$ و $f(p+x)=f(x)$). (p عدد حقيقي موجب تماما)

للحفظ

- إذا كانت الدالة f زوجية فإن محور التراتيب في المعلم **المتعامد** هو محور تناظر لتمثيلها البياني.
- إذا كانت الدالة f فردية فإن مبدأ المعلم هو مركز تناظر لتمثيلها البياني.
- إذا كانت الدالة f دورية ودورها p ، فإن تمثيلها البياني صامد إجمالا بالانسحابات التي شعاعها $pk\vec{i}$. حيث $(k \in Z)$

◆ **تركيب دالتين**

تعريف

نعتبر E ، F وَ G ثلاثة أجزاء من R.

إذا كانت الدالة f من E نحو F وكانت الدالة g من F نحو G ،فإن الدالة $g \circ f$ تدعى مركّب الدالتين f وَ g بهذا الترتيب وهي من E نحو G معرّفة بـــ: $(g \circ f)(x) = g[f(x)]$.

ولدينا: $x \in D_{g \circ f}$ يكـــافئ ($x \in D_f$ وَ $f(x) \in D_g$)

◆ **اتجاه تغـــيير دالة**

تعريف

f دالة عددية معرّفة على المجال I

[f متزايدة تماما على I] **يكـــافئ**

[من أجل كل x_1 وَ x_2 من I ، إذا كان $x_1 < x_2$ فـــإن $f(x_1) < f(x_2)$]

[f متناقصة تماما على I] **يكـــافئ**

[من أجل كل x_1 وَ x_2 من I ، إذا كان $x_1 < x_2$ فـــإن $f(x_1) > f(x_2)$]

[f متزايـــدة على I] **يكـــافئ**

[من أجل كل x_1 وَ x_2 من I ، إذا كان $x_1 < x_2$ فإن $f(x_1) \le f(x_2)$]

[f متناقـــصة على I] **يكـــافئ**

[من أجل كل x_1 وَ x_2 من I ، إذا كان $x_1 < x_2$ فإن $f(x_1) \ge f(x_2)$]

[f ثابـــتة على I] **يكـــافئ**

[من أجل كل x_1 وَ x_2 من I ، $f(x_1) = f(x_2)$]

للحفظ

f وَ g دالتان معرفتان على نفس المجال I.

إذا كان للدالتين f وَ g نفس اتجاه التغيّر **فإن** $g \circ f$ تكون متزايدة على I.

إذا كان للدالتين f وَ g اتجاها تغيّر متعاكسين **فإن** $g \circ f$ تكون متناقصة على I.

◆ **القيم الحدية لدالة**

تعريف

f دالة عددية معرّفة على المجموعة D من R وَ x_0 عنصر من D.

الدالة f تقبل قيمة **حدية عظمى** عند x_0 **يكـــافئ** من أجل كل x من D ، $f(x) \le f(x_0)$.

الدالة f تقبل قيمة **حدية صغرى** عند x_0 **يكـــافئ** من أجل كل x من D ، $f(x) \ge f(x_0)$.

الدالة f تقبل قيمة **حدية عظمى محلّية** عند x_0 **يكـــافئ** يوجد مجال I من D يضم x_0 بحيث،من أجل كل x من I ، $f(x) \le f(x_0)$.

الدالة f تقبل قيمة **حدية صغرى محلّية** عند x_0 **يكـــافئ** يوجد مجال I من D يضم x_0 بحيث،من أجل كل x من I ، $f(x) \ge f(x_0)$.

في هذه التعاريف، $f(x_0)$ تدعى قيمة حدية للدالة f عند x_0.

★ **النهايـــات** — نهايات دوال مألوفة

الدوال $n \in N^*$	$x \mapsto x^n$	$x \mapsto \sqrt{x}$	$x \mapsto \lvert x \rvert$	$x \mapsto \frac{1}{x^n}$
مجموعة التعريف	R	R_+	R	R^*
النهاية عند $+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	0^+
النهاية عند $-\infty$	ز n/ $+\infty$ ف n/ $-\infty$	غير موجود	$+\infty$	ز n/ 0^+ ف n/ 0^-
النهاية عند x_0 ، $x_0 \in R$	x_0^n	$\sqrt{x_0}$ حيث $x_0 \ge 0$	$\lvert x_0 \rvert$	حالة $x_0 = 0$ ز n/ $+\infty$ ف n/ $\pm\infty$

الدوال $n \in N^*$	$x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$	$x \mapsto \frac{1}{\lvert x \rvert}$	$x \mapsto \sin x$	$x \mapsto \cos x$
مجموعة التعريف	R_+^*	R^*	R	R
النهاية عند $+\infty$	0^+	0^+	غير موجود	غير موجود
النهاية عند $-\infty$	غير موجود	0^+	غير موجود	غير موجود
النهاية عند x_0 ، $x_0 \in R$	$\frac{1}{\sqrt{x_0}}$ / $x_0 > 0$	$\frac{1}{\lvert x_0 \rvert}$ حيث $x_0 \neq 0$	$\sin x_0$	$\cos x_0$

للحفظ

إذا كان $P(x)$ كثير الحدود فإن $\lim_{x \to x_0} P(x) = P(x_0)$ من أجل كل x_0 من R.

عند $-\infty$ أو $+\infty$، الكثير الحدود له نفس نهاية وحيد الحد الأعلى درجة في عبارته.

إذا كان $Q(x)$ كسر ناطق فإن $\lim_{x \to x_0} Q(x) = Q(x_0)$ من أجل كل x_0 من D_Q.

عند $-\infty$ أو $+\infty$ ، الكسر الناطق له نفس نهاية حاصل قسمة وحيد الحد الأعلى درجة في بسطه على وحيد الأعلى درجة في مقامه.

◆ **النهايات والمقارنة**

الرمز α يشير إلى عدد حقيقي، $-\infty$ أو $+\infty$. l عدد حقيقي، f ، g ، h ثلاث دوال عددية معرّفة على المجال I .(جوار α)

إذا كــان [من أجل كل x من I ، $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ و كانت $\lim_{x \to \alpha} g(x) = \lim_{x \to \alpha} h(x) = l$]

فــإن [$\lim_{x \to \alpha} f(x) = l$]. (الحصر)

إذا كــان [من أجل كل x من I ، $g(x) \leq f(x)$ وكانت $\lim_{x \to \alpha} g(x) = +\infty$]

فــإن [$\lim_{x \to \alpha} f(x) = +\infty$].

إذا كان [من أجل كل x من I ، $f(x) \leq h(x)$ وكانت $\lim_{x \to \alpha} h(x) = -\infty$]

فــإن [$\lim_{x \to \alpha} f(x) = -\infty$].

◆ **العمليات على النهايات**

الرمز α يشير إلى عدد حقيقي، $-\infty$ أو $+\infty$. l و l' عددان حقيقيان.

f و g دالتان عدديتان معرّفتان على المجال I .(جوار α)

نهايات المجموع

نهاية f هي	l	l	l	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
نهاية g هي	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$
نهاية $(f+g)$ هي	$l+l'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	غير معيّنة	

نهايات الجداء

نهاية f هي	l	$l>0$	$l<0$	$l>0$	$l<0$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	0
نهاية g هي	l'	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$
نهاية $(f \times g)$ هي	$l \times l'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	غير معينة

نهايات حاصل القسمة (في حالة نهاية g غير معدومة)

نهاية f هي	l	l	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$
نهاية g هي	$l' \neq 0$	$\pm\infty$	$l'<0$	$l'>0$	$l'>0$	$l'<0$	$\pm\infty$
نهاية $\left(\frac{f}{g}\right)$ هي	$\frac{l}{l'}$	0	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	غير معينة

نهايات حاصل القسمة (في حالة نهاية g معدومة)					
نهـاية f هي	$l>0$ أو $+\infty$	$l>0$ أو $+\infty$	$l<0$ أو $-\infty$	$l<0$ أو $-\infty$	0
نهـاية g هي	0^+	0^-	0^+	0^-	0
نهاية $\left(\frac{f}{g}\right)$ هي	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	غير معينة

نهايات شهيرة

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ ، $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=1$ ، $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}$

◆ **المستقيمات المقاربة**

الرمز α يشير إلى $-\infty$ أو $+\infty$. f وَ g دالتان عدديتان معرّفتان على الأقل على أحد المجالين $]\alpha;+\infty[$ أو $]-\infty;\alpha[$

(C_f) وَ (C_g) تمثيلاهما البيانيان.

تعريف

التمثيلان البيانيان (C_f) وَ (C_g) متقاربان عند α يكـافئ

$$\lim_{x\to\alpha}[f(x)-g(x)]=0$$

نتائج

- المستقيم الذي معادلته $y=mx+p$ مقارب للمنحني (C_f) عند α **معنـاه** $\lim\limits_{x\to\alpha}[f(x)-(mx+p)]=0$

  إذا كان $m\neq 0$ **فـإن** المستقيم المقارب يكون مائلاً.

  إذا كان $m=0$ **فـإن** المستقيم المقارب معادلته $y=p$ يكون مواز لحامل محور الفواصل.

- **إذا كان** $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\alpha$ **فإن** المستقيم الذي معادلته $x=x_0$ مقارب للمنحني (C_f) ويوازي حامل محور التراتيب.

★ **الاستمرارية**

تعريف

f دالة عددية معرّفة على المجال المفتوح I من R وَ x_0 عنصر من I.

- f مستمرة عند x_0 **معنـاه** $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$.
- f مستمرة عند x_0 من اليمين **معنـاه** $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\>}}f(x)=f(x_0)$.
- f مستمرة عند x_0 من اليسار **معنـاه** $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\<}}f(x)=f(x_0)$.

مبرهنة

f مستمرة عند x_0 **معنـاه** f مستمرة عند x_0 من اليمين ومن اليسار.

◆ **امتداد دالة بالاستمرار**

f دالة معرّفة ومستمرة على المجموعة D وَ x_0 عدد حقيقي حيث: $x_0\notin D$. l عدد حقيقي إذا كانت $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=l$ ، فإن الدالة g المعرّفة على $D\cup\{x_0\}$ بما يلي:

$g(x)=f(x)$ من أجل $x\in D$ وَ $g(x_0)=l$ تدعى امتداد للدالة f بالاستمرار عند x_0.

للحفظ

f وَ g دالتان مستمرتان على المجموعة D (عند كل x_0 من D).

- الدالتان $(f+g)$ وَ $(f\times g)$ مستمرتان على D.
- إذا كانت g لا تنعدم على D فإن: الدالتان $\frac{1}{g}$ وَ $\frac{f}{g}$ مستمرتان على D.
- إذا كانت u مستمرة عند x_0 وكانت v مستمرة عند $u(x_0)$ فإن الدالة $(v\circ u)$ مستمرة عند x_0.
- الدوال: $|f|$ ، $\sqrt{f}$ ، $\sin f$ ، $\cos f$ ، $\tan f$ مستمرة على مجموعة تعريفها.

◆ مبرهنة القيم المتوسطة

مبرهنة

إذا كانت الدالة f مستمرة على المجال $[a;b]$، فإنه من أجل كل عدد حقيقي k من المجال K الذي حداه $f(a)$ و $f(b)$، المعادلة $f(x)=k$ تقبل على الأقل حلاً في المجال $[a;b]$.

ملحوظة: إضافة إلى f مستمرة في $[a;b]$،إذا كانت f رتيبة تماما على $[a;b]$ فإن للمعادلة $f(x)=k$ حلا وحيدا.

تعمم هذه المبرهنة في حالة f مستمرة على مجال مفتوح أو نصف مفتوح، محدود أو غير محدود، في هذه الحالة حدا المجال K يمكن أن يكونا نهايات f عند طرفي $[a;b]$.

★ **الاشتقاقية**

◆ **العدد المشتق**

تعريف

f دالة عددية معرّفة على المجال المفتوح I من R و x_0 عنصر من I.

f تقبل الاشتقاق عند x_0 **إذا وفقط إذا** تحقق احد الشروط الثلاثة المتكافئة التالية:

- يوجد عدد حقيقي k و دالة ε معرّفة على I بحيث:

من أجل كل x من I، $f(x)=f(x_0)+k(x-x_0)+(x-x_0)\varepsilon(x)$

و $\lim\limits_{x\to x_0}\varepsilon(x)=0$.

- يوجد عدد حقيقي k و دالة θ معرّفة على I بحيث:

من أجل كل h من I، $f(x_0+h)=f(x_0)+hk+h\theta(h)$

و $\lim\limits_{h\to 0}\theta(h)=0$.

- الدالة g المعرّفة على $I-\{x_0\}$ بـــ: $g(x)=\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ تقبل نهاية محدودة k عند x_0.

العدد الحقيقي k يدعى العدد المشتق للدالة f عند x_0 ونرمز: $f'(x_0)=k$

الدالة $h\mapsto f(x_0)+hf'(x_0)$ تدعى تقريب تآلفي للدالة $h\mapsto f(x_0+h)$ بجوار 0.

للحفظ

لدينا $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ ونكتب كذلك

$f'(x_0)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ (بوضع $x-x_0=h$)

الكتابة التفاضلية $dy=f'(x)dx$

لدينا $f'(x_0)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ ......(1)

بوضع: $\Delta_y=f(x_0+h)-f(x_0)$ و $\Delta_x=h$ تكتب العلاقة (1) بالشكل:

$f'(x_0)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\Delta_y}{\Delta_x}$ أي $f'(x_0)=\dfrac{\Delta_y}{\Delta_x}+\theta(h)$ و $\lim\limits_{h\to 0}\theta(h)=0$

يعني $\Delta_y=f'(x_0)\Delta_x-\Delta_x\theta(\Delta_x)$ و $\lim\limits_{\Delta_x\to 0}\theta(\Delta_x)=0$

عندما يكون المقدار Δ_x قريب من الصفر، يكون لدينا: $\Delta_y\approx f'(x_0)\Delta_x$ ونرمز بـــ: $\dfrac{\Delta_y}{\Delta_x}=f'(x_0)$

ويمكننا أن نستعمل الرمز: $\dfrac{\Delta f}{\Delta_x}$ بدل الرمز f'. ونكتب: $f'(x_0)=\dfrac{\Delta_f}{\Delta_x}(x_0)$

الدالة المشتقة

تعريف

f دالة عددية معرّفة على المجموعة D وقابلة للاشتقاق على المجموعة D' (عند كل قيمة x_0 من D')حيث: $D'\subset D$

الدالة التي ترفق بكل عدد x من D'،العدد المشتق $f'(x)$ تدعى الدالة **المشتقة الأولى** (أو **المشتقة**) للدالة f. ويرمز لها: f'.

نتيجة

إذا كانت الدالة f' بدورها تقبل الاشتقاق على D'' حيث: $D''\subset D'$، فباستعمال التعريف السابق توجد الدالة المشتقة للدالة f' يرمز لها f'' وتدعى الدالة **المشتقة الثانية** للدالة f.

بنفس الطريقة يمكننا الحديث عن الدالة المشتقة الثالثة،الرابعة،... للدالة f.

مبرهنة

إذا كانت دالة قابلة للاشتقاق على المجموعة D ، فإن هذه الدالة مستمرة على D .

إنتبه : عكس هذه المبرهنة غير صحيح

◆ معادلة المماس للمنحني

تعريف

إذا كانت الدالة f تقبل الاشتقاق عند x_0 ، فإن المستقيم Δ الذي معادلته $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ يدعى المماس للمنحني الممثل للدالة f عند النقطة ذات الفاصلة x_0 . **$f'(x_0)$ يدعى معامل توجيه المماس Δ .**

ملاحظة: f دالة عددية معرّفة على المجال المفتوح I من R وَ x_0 عنصر من I .

إذا كانت الدالة g المعرّفة على $I - \{x_0\}$ بـ: $g(x) = \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ تقبل نهاية غير محدودة $(+\infty / -\infty)$ عند x_0 ، (أو عند x_0^+ / x_0^-).

فإن الدالة f لا تقبل الاشتقاق عند x_0 وَ تمثيلها البياني يقبل مماسا (نصف مماس) عند النقطة ذات الفاصلة x_0 ، يوازي حامل محور التراتيب.

◆ مشتقات الدوال المألوفة

الدالة	مجموعة تعريفها	مجموعة قابلية اشتقاقها	دالتها المشتقة
$x \mapsto k$	R	R	$x \mapsto 0$
$x \mapsto x$	R	R	$x \mapsto 1$
$x \mapsto x^2$	R	R	$x \mapsto 2x$
$x \mapsto x^3$	R	R	$x \mapsto 3x^2$
$n \in N^* / x \mapsto x^n$	R	R	$x \mapsto nx^{n-1}$
$x \mapsto \dfrac{1}{x}$	R^*	R^*	$x \mapsto -\dfrac{1}{x^2}$
$n \in N^* / x \mapsto \dfrac{1}{x^n}$	R^*	R^*	$x \mapsto -\dfrac{n}{x^{n+1}}$

الدالة	مجموعة تعريفها	مجموعة قابلية اشتقاقها	دالتها المشتقة
$x \mapsto \sqrt{x}$	R_+	R_+^*	$x \mapsto \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
$x \mapsto \sin x$	R	R	$x \mapsto \cos x$
$x \mapsto \cos x$	R	R	$x \mapsto -\sin x$
$x \mapsto \tan x$	$\mathsf{R} - \left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi / k \in Z\right\}$	$\mathsf{R} - \left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi / k \in Z\right\}$	$x \mapsto \dfrac{1}{\cos^2 x}$

العمليات على الدوال المشتقة

f وَ g دالتان قابلتان للاشتقاق على المجموعة D .

الدالة	الدالة المشتقة	الشروط
$f + g$	$f' + g'$	/
kf	kf'	$k \in \mathsf{R}^*$
fg	$f'g + g'f$	/
$\dfrac{1}{f}$	$-\dfrac{f'}{f^2}$	$f \neq 0$ على كامل D
$\dfrac{f}{g}$	$\dfrac{f'g - g'f}{g^2}$	$g \neq 0$ على كامل D
$x \mapsto f(ax+b)$	$x \mapsto af'(ax+b)$	$b \in \mathsf{R}$ و $a \in \mathsf{R}^*$
$x \mapsto f[h(x)]$	$x \mapsto h'(x) \times f'[h(x)]$	h دالة تقبل الاشتقاق على E حيث: $h(E) \subset D$
f^n	$nf'f^{n-1}$	$n \in Z^*$ وَ f لاتنعدم من أجل $n < 0$
$\sqrt{f}$	$\dfrac{f'}{2\sqrt{f}}$	f موجبة تماما على كامل D

الدوال كثير الحدود والناطقة تقبل الاشتقاق على مجموعة تعريفها

◆ **المشتقة واتجاه تغيّر الدالة**

للحفظ

f دالة قابلة للاشتقاق على المجال I.

f متزايدة تماما على I **معناه** من أجل كل x من I، $f'(x) > 0$.

f متناقصة تماما على I **معناه** من أجل كل x من I، $f'(x) < 0$.

f ثابتة على I **معناه** من أجل كل x من I، $f'(x) = 0$.

ملاحظة: f دالة قابلة للاشتقاق على المجال $[a;b]$.

- إذا كان من أجل كل x من $]a;b[$، $f'(x) > 0$ فـــإن f متزايدة تماما على $[a;b]$.
- إذا كان من أجل كل x من $]a;b[$، $f'(x) < 0$ فـــإن f متناقصة تماما على $[a;b]$.

◆ **العدد المشتق من اليمين ومن اليسار**

f دالة عددية معرّفة على المجال المفتوح I من R وَ x_0 عنصر من I.

- f تقبل الاشتقاق من **يمين** x_0 إذا وفقط إذا كانت الدالة φ المعرّفة على $I - \{x_0\}$ بـ: $\varphi(x)=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ تقبل نهاية محدودة k_1 عند **يمين** x_0. ونرمز: $k_1 = f'_d(x_0)$

$f'_d(x_0)$ هو معامل توجيه نصف المماس للمنحنى المُمثّل للدالة f عند النقطة ذات الفاصلة x_0.

- f تقبل الاشتقاق من **يسار** x_0 إذا وفقط إذا كانت الدالة φ المعرّفة على $I - \{x_0\}$ بـ: $\varphi(x)=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ تقبل نهاية محدودة k_2 عند **يسار** x_0. ونرمز: $k_2 = f'_g(x_0)$

$f'_g(x_0)$ هو معامل توجيه نصف المماس للمنحنى المُمثّل للدالة f عند النقطة ذات الفاصلة x_0.

مبرهنة

f دالة عددية معرّفة على المجال المفتوح I من R وَ x_0 عنصر من I.

f تقبل الاشتقاق عند x_0 **إذا وفقط إذا** قبلت الاشتقاق من يمين x_0 ومن يسار x_0 وكان: $f'_d(x_0) = f'_g(x_0)$

★ **الدوال الأصلية**

تعريف

f وَ F دالتان معرّفتان على المجال I.

F دالة أصلية للدالة f على المجال I، إذا وفقط إذا كانت الدالة F تقبل الاشتقاق على I، و دالتها المشتقة هي f.

أي من أجل كل x من I، $F'(x) = f(x)$

للحفظ

مبرهنـة: (وجود دوال أصلية لدالة)

كل دالة f مستمرة على المجال I، تقبل على الأقل دالة أصلية F على I.

خاصـة:

- إذا قبلت الدالة f على المجال I دالة أصلية F، فإن الدالة f تقبل على I عدد غير منته من الدوال الأصلية كلها من الشكل:

$x \mapsto F(x) + k$ حيث k عدد حقيقي

- إذا قبلت الدالة f على المجال I دالة أصلية F،فإنه من أجل كل ثنائية $(x_0;y_0)$ حيث $x_0 \in I$ وَ $y_0 \in R$، توجد دالة أصلية F_0 وحيدة للدالة f على المجال I والتي تأخذ القيمة y_0 عند x_0.

الدوال الأصلية لدوال مألوفة

الدالة	شروط وجود الدوال الأصلية	الدوال الأصلية / $k \in R$
$x \mapsto a$ / $(a \in R)$	$x \in R$	$x \mapsto ax + k$
$x \mapsto x^n$ / $(n \in Z^* - \{-1\})$	$x \in R$ من أجل $n > 0$ $x \in R_+^*$ أو $x \in R_-^*$ من أجل $n<0$	$x \mapsto \frac{x^{n+1}}{n+1} + k$
$x \mapsto x^n$ / $(n \in Q - Z)$	$x \in R_+^*$	$x \mapsto \frac{x^{n+1}}{n+1} + k$
$x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$	$x \in R_+^*$	$x \mapsto 2\sqrt{x} + k$

الدالة	شروط وجود الدوال الأصلية	الدوال الأصلية / $k\in\mathbb{R}$
$x\mapsto \sin x$	$x\in\mathbb{R}$	$x\mapsto -\cos x+k$
$x\mapsto \cos x$	$x\in\mathbb{R}$	$x\mapsto \sin x+k$
$x\mapsto \sin(ax+b)$ $a\neq 0/$	$x\in\mathbb{R}$	$x\mapsto \frac{-1}{a}\cos(ax+b)+k$
$x\mapsto \cos(ax+b)$ $a\neq 0/$	$x\in\mathbb{R}$	$x\mapsto \frac{1}{a}\sin(ax+b)+k$
$x\mapsto -\frac{1}{\sin^2 x}$	$l\in\mathbb{Z}\ /\ x\in\left]l\pi;(l+1)\pi\right[$	$x\mapsto \cot g\ x+k$
$x\mapsto \frac{1}{\cos^2 x}$	$l\in\mathbb{Z}\ /\ x\in\left]-\frac{\pi}{2}+l\pi;\frac{\pi}{2}+l\pi\right[$	$x\mapsto \tan x+k$

◆ **عمليات على الدوال الأصلية**

f، g، f'، g' دوال معرّفة وقابلة للاشتقاق على المجال I	الشروط	دالة أصلية
af' حيث $(a\in\mathbb{R})$	على I	af
$f'+g'$	على I	$f+g$
$f'g+g'f$	على I	fg
$-\frac{f'}{f^2}$	على I حيث $f\neq 0$	$\frac{1}{f}$
$n\in\mathbb{Z}^*-\{-1\}\ /\ f'f^n$	على I من أجل $n>0$ على I حيث $f\neq 0$ من أجل $n<0$	$\frac{f^{n+1}}{n+1}$
$n\in\mathbb{Q}-\{-1\}/\ f'f^n$	على I حيث $f>0$	$\frac{f^{n+1}}{n+1}$
$\frac{f'}{2\sqrt{f}}$	على I حيث $f>0$	$\sqrt{f}$
$(g'\circ f)\times f'$	على I و $f(I)\subset I$	$g\circ f$

تمـــارين محـــلولة

النهايات

1

احسب نهايات الدوال التالية عند أطراف مجالات تعريفها في كل حالة.

الدالة f معرّفة على $\mathbb{R}$ بالدستور: $f(x)=-4x^2+x+5$

الدالة g معرّفة على $\mathbb{R}-\{-2;2\}$ بالدستور: $g(x)=\frac{x^3-8}{x^2-4}$

الدالة h معرّفة على $\mathbb{R}$ بالدستور: $h(x)=\frac{3-x}{x^2+2}$

الدالة k معرّفة على $]0;+\infty[$ بالدستور: $k(x)=x\sqrt{x+\frac{1}{x}}$

الحل: $\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(-4x^2\right)=-4(+\infty)=-\infty$

و $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(-4x^2\right)=-4(+\infty)=-\infty$

$\lim_{x\to-\infty} g(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^3}{x^2}\right)=\lim_{x\to-\infty} x=-\infty$ و $\lim_{x\to+\infty} g(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^3}{x^2}\right)=\lim_{x\to+\infty} x=+\infty$

و $\lim_{\substack{x\to-2\\<}} g(x)=\frac{-16}{0^+}=-\infty$ و $\lim_{\substack{x\to-2\\>}} g(x)=\frac{-16}{0^-}=+\infty$

و $\lim_{x\to2} g(x)=\lim_{x\to2}\left(\frac{(x-2)\left(x^2+2x+4\right)}{(x-2)(x+2)}\right)=\lim_{x\to2}\frac{x^2+2x+4}{x+2}=3$

$\lim_{x\to-\infty} h(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{-x}{x^2}\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{-1}{x}\right)=0^+$

و $\lim_{x\to+\infty} h(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{-x}{x^2}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{-1}{x}\right)=0^-$

$\lim_{x\to+\infty} k(x)=+\infty\sqrt{+\infty+0}=+\infty$

$\lim_{\substack{x\to0\\>}} k(x)=\lim_{\substack{x\to0\\>}}\sqrt{x^2\left(x+\frac{1}{x}\right)}=\lim_{\substack{x\to0\\>}}\sqrt{x^3+x}=0^+$.

الكتابة $\sqrt{x^2}=x$ تصحّ فقط من أجل $x\geq 0$.

قابلية الاشتقاق- حساب المشتقات

2	• ادرس قابلية اشتقاق الدالة f عند x_0 في الحالتين: $f(x)=\sqrt{x+1}$ و $x_0=-1$ ، $f(x)=\lvert x\rvert$ و $x_0=0$ • عيّن الدالة المشتقة لكل من الدوال التالية: الدالة g معرّفة على R بالدستور: $g(x)=-4x^2+x+5$. الدالة h معرّفة على R بالدستور: $h(x)=x^2\cos x$. الدالة k معرّفة على R بالدستور: $k(x)=(2x^2+5)^3$. الدالة l معرّفة على R-{-1;1} بالدستور: $l(x)=\frac{2}{x^2-1}$. الدالة p معرّفة على R - {-2} بالدستور: $p(x)=\frac{-x^2+5}{x+2}$. الدالة q معرّفة على R بالدستور: $q(x)=\sqrt{x^2+x+2}$.

الحل: . $f(x)=\sqrt{x+1}$ معرّفة على $]-1;+\infty[$. إذاً ندرس قابلية الاشتقاق من يمين -1 فقط.

$$\lim_{\substack{x\to -1\\ >}} \frac{f(x)-f(-1)}{x+1}=\lim_{h\to0}\frac{f(h-1)-f(-1)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{1}{\sqrt{h}}=+\infty$$

يعني أن f لا تقبل الاشتقاق عند -1 .كون النهاية غير محدودة.

$f(x)=|x|$ معرّفة على R. ندرس قابلية الاشتقاق عند 0 من الجهتين.

من أجل $h\neq 0$ لدينا: $\frac{f(h+0)-f(0)}{h}=\frac{|h|}{h}$

إذاً: $\lim_{\substack{h\to0\\ >}}\frac{f(h+0)-f(0)}{h}=\lim_{\substack{h\to0\\ >}}\frac{|h|}{h}=1$ و $\lim_{\substack{h\to0\\ <}}\frac{f(h+0)-f(0)}{h}=\lim_{\substack{h\to0\\ <}}\frac{|h|}{h}=-1$

يعني أن الدالة f تقبل الاشتقاق من يمين 0 و تقبل الاشتقاق من يسار 0 وبما أن $f'_d(0)\neq f'_g(0)$ فإن f لا تقبل الاشتقاق عند 0. **هندسياً:** المنحني الممثّل للدالة f يقبل نصفي مماس عند النقطة ذات الفاصلة 0.

. من أجل كل x من R، $g'(x)=-8x+1$.

من أجل كل x من R، $h'(x)=2x\cos x-x^2\sin x$.

من أجل كل x من R، $k'(x)=3(2x^2+5)'(2x^2+5)^2=12x(2x^2+5)^2$

من أجل كل x من R-{-1;1}، $l'(x)=-\frac{2(x^2-1)'}{(x^2-1)^2}=-\frac{4x}{(x^2-1)^2}$

من أجل كل x من R-{-2}

$$p'(x)=\frac{(-x^2+5)'(x+2)-(x+2)'(-x^2+5)}{(x+2)^2}=\frac{-2x(x+2)-(-x^2+5)}{(x+2)^2}=\frac{-x^2-4x-5}{(x+2)^2}$$

من أجل كل x من R، $q'(x)=\frac{(x^2+x+2)'}{2\sqrt{x^2+x+2}}=\frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+2}}$

استعمال مبرهنة القيم المتوسطة

3	الدالة f معرّفة على R بالدستور: $f(x)=-x^3-x+5$ بيّن أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل على الأقل حلا في المجال $[0;2]$. هل هذا الحل وحيد؟

الحل: الدالة f مستمرة على R كونها كثير الحدود، وبالخصوص على $[0;2]$.

ولدينا: $f(0)=5$ وَ $f(2)=-5$ وبالتالي: $f(0)\times f(2)<0$

إذاً حسب مبرهنة القيم المتوسط ($k=0$)، فإن المعادلة $f(x)=0$ تقبل على الأقل حلا في المجال $[0;2]$.

الدالة f قابلة للاشتقاق على R كونها كثير الحدود، وبالخصوص على $[0;2]$.

لدينا: $f'(x)=-3x^2-1$ إذاً، من أجل كل x من R، $f'(x)<0$ يعني f متناقصة تماما على R وبالخصوص على $[0;2]$. وبالتالي الحل وحيد.

محور التناظر لمنحن دالة

4	الدالة f معرّفة على R بالدستور: $f(x)=-x^2-4x+1$ (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد $(O;\vec{i};\vec{j})$. بيّن أن المستقيم الذي معادلته $x=-2$ هو محور تناظر للمنحني (C_f).

الحل: (الطريقة 1) نجري تغيير للمعلم من $(O;\vec{i};\vec{j})$ إلى $(\Omega;\vec{i};\vec{j})$ حيث: $\Omega(-2;0)$

ونستخرج معادلة للمنحني (C_f) في المعلم الجديد، ثم نبيّن أنها معادلة التمثيل البياني لدالة زوجية.

M نقطة من المستوي إحداثياها $(x;y)$ في المعلم $(O;\vec{i};\vec{j})$، وإحداثياها $(X;Y)$ في المعلم $(\Omega;\vec{i};\vec{j})$.

إذاً دساتير تغيير المعلم هي: $\begin{cases}x=X-2\\ y=Y\end{cases}$ (تستخرج من العلاقة الشعاعية $\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{O\Omega}+\overrightarrow{\Omega M}$)

$M\in(C_f)$ معناه $y=-x^2-4x+1$ يكافئ $Y=-(X-2)^2-4(X-2)+1$

أي $Y=-X^2+5$

الكتابة الأخيرة هي معادلة للمنحني (C_f) في المعلم $(\Omega;\vec{i};\vec{j})$،

نعتبر الدالة g المعرّفة على R بالدستور: $g(x)=-x^2+5$

الدالة g زوجية كون: من اجل كل x من R، $-x\in R$ و $g(-x)=g(x)$.

وبالتالي المستقيم الذي معادلته $x=-2$ هو محور تناظر للمنحني (C_f).

(الطريقة 2) نبيّن أنه من اجل كل x من R، $(-2-x)\in R$ و $(-2+x)\in R$ و $f(-2+x)=f(-2-x)$ (تحقق من ذلك).

تمارين للتدريب

1. الدالة f معرّفة على المجموعة $R-\{-2\}$ بالدستور: $f(x)=\frac{5x-1}{2+x}$

احسب نهايات f عند أطراف مجالات التعريف، ثم استنتج أن هناك مستقيمات مقاربة للمنحني الممثل للدالة f، يطلب معادلاتها.

الدالة g معرّفة على المجموعة $R-\{1\}$ بالدستور: $g(x)=\frac{-x^2+2x-4}{x-1}$

بيّن أن المستقيم الذي معادلته $y=-x+1$ هو مستقيم مقارب للمنحني الممثّل للدالة g.

الدالة h معرّفة على المجموعة $R-\left\{\frac{1}{2}\right\}$ بالدستور: $h(x)=\frac{6x^2-7x+3}{2x-1}$

عيّن الأعداد الحقيقية a، b، c بحيث: من أجل كل x من $R-\left\{\frac{1}{2}\right\}$،

$h(x)=ax+b+\frac{c}{2x-1}$، ثم استنتج أن المنحني الممثّل للدالة h يقبل مستقيم مقارب يطلب إعطاء معادلته.

2. حول حساب النهايات.

الدالة f معرّفة بالدستور	أحسب نهايات f عند
$f(x)=\frac{2x^2+5}{\lvert x\rvert-1}$	$-\infty$ و $+\infty$ و 1 و -1
$f(x)=\frac{x^3-3x+2}{x^4-2x^2+1}$	$-\infty$ و $+\infty$ و 1
$f(x)=\frac{\sqrt{x+2}-2}{\sqrt{x+7}-3}$	$+\infty$ و 2
$f(x)=\sqrt{x^2+3x}-\sqrt{x^2+1}$	$-\infty$ و $+\infty$
$f(x)=x+\sin x$	$-\infty$ و $+\infty$
$f(x)=\frac{\tan 2x}{\sqrt{1-\cos x}}$	0

3. الدالة f معرّفة على المجموعة $]-\infty;-2]\cup[2;+\infty[$ بالدستور:

$f(x)=x-\sqrt{x^2-4}$

اكتب معادلة لمماس المنحني (C_f) الممثّل للدالة f عند النقطة ذات الفاصلة -3.

أعط معادلة لكل من نصفي المماس للمنحني (C_f) عند النقطتين ذات الفاصلتين -2 و 2.

4. المستوي منسوب إلى معلم متعامد $(O;\vec{i};\vec{j})$.

- الدالة f معرّفة على المجموعة R بالدستور: $f(x)=ax^2+bx+c$ حيث: a، b وَ c أعداد حقيقية.

عيّن الأعداد a، b وَ c حتى يكون: $f(2)=2$، $f(4)=-4$، $f'(4)=0$.

ادرس تغيرات الدالة f واسم تمثيلها البياني (C_f) في المجال $[0;8]$.

- عيّن الدالة g كثير الحدود من الدرجة الثانية، علما أن المستقيم الذي معادلته $y=2x-\frac{3}{2}$ هو مماس للمنحني (C_g) الممثّل للدالة g عند النقطة ذات الفاصلة 1، وأن $g(2)=2$.

ادرس تغيرات الدالة g واسم تمثيلها البياني (C_g) في المجال $[0;8]$.

أدرس الوضعية النسبية للمنحنيين (C_f) وَ (C_g) في المجال $[0;8]$.

5. الدالة f معرّفة على المجموعة $R-\{0\}$ بالدستور: $f(x)=x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}$

وَ (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

- بيّن أن الدالة f فردية.
- نسمي g اختصار للدالة f على المجال $I=]0;+\infty[$ وَ (C_g) تمثيلها البياني في المعلم السابق.

احسب نهايات g عند 0 وَ عند $+\infty$.

- بيّن أن الدالة g متزايدة على I.
- نضع: $h(x)=g(x)-x$. أحسب نهاية h عند $+\infty$ وترجم هندسيا النتيجة.
- احسب $\lim_{h\to 0}\frac{g(x)-1}{x}$. ما هو مسار المنحني (C_g) بجوار النقطة ذات الإحداثيات $(0;1)$
- أنشئ المنحنيين (C_f) وَ (C_g).

6. عيّن الدوال الأصلية للدالة f على المجال I في كل حالة:

$f(x)=\frac{1}{(2x+1)^{\frac{2}{3}}}$ وَ $I=\left]-\frac{1}{2};+\infty\right[$ ، $f(x)=\frac{\cos x+x\sin x}{\cos^2 x}$ وَ $I=\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$

$f(x)=\cos^4 x\sin x$ وَ $I=R$ ، $f(x)=x\sqrt{x+2}$ وَ $I=]-2;+\infty[$

$f(x)=\sin^5 x\cos^4 x$ وَ $I=R$ ، $f(x)=\sin^3 x+\cos^2 x$ وَ $I=R$

7. الدالة f معرّفة على المجموعة $R-\{-1\}$ بالدستور: $f(x)=\frac{x^3+x^2-x}{(x+1)^2}$

عيّن الأعداد الحقيقية a، b وَ c حتى يكون، من أجل كل x من $R-\{-1\}$،

$$f(x)=ax+b+\frac{c}{(x+1)^2}$$

استنتج الدالة الأصلية للدالة f على المجال $]-1;+\infty[$ والتي تنعدم من اجل $x=1$.

8. الدالة f معرّفة على المجموعة $R-\{-1;0;1\}$ بالدستور: $f(x)=\frac{x^4-6x^2+1}{x^3-x}$

وَ (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

- بيّن أنه توجد ثلاثة أعداد حقيقية a، b وَ c بحيث: من أجل كل x من $R-\{-1;0;1\}$، $f(x)=x+\frac{a}{x}+\frac{b}{x-1}+\frac{c}{x+1}$
- ادرس تغيرات الدالة f، وعيّن المستقيمات المقاربة للمنحني (C_f) وكذا مركز تناظره.
- حل المعادلتين: $f(x)=0$ وَ $f(x)=x$ ثم أرسم (C_f).
- نعتبر الدالة كثير الحدود g المعرّفة على R بالدستور:

$g(x)=x^4-ax^3-6x^2+ax+1$ وَ $a\in R$

تحقق -باستعمال النتائج السابقة حول تغيرات الدالة f - أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل أربعة حلول حقيقية وذلك مهما كان العدد a.

9. الدالة f_m معرّفة على المجموعة R بالدستور: $f_m(x)=\frac{(x+m)(3x+10m)}{(x+2m)^2}$

حيث m وسيط حقيقي

(C_m) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

ادرس تغيرات الدالة f_m، وعيّن المستقيمات المقاربة للمنحني (C_m).

ادرس وضعية (C_m) بالنسبة للمستقيم المقارب للمنحني (C_m) والموازي لحامل محور الفواصل.

ما يمكن القول عن المنحني (C_0)؟

نفرض أن $m \neq 0$. ما هي إحداثيات I_m نقطة تقاطع المنحني (C_m) مع مستقيمه المقارب الأفقي؟

تعرّف على مجموعة النقط I_m عندما تتغيّر m.

10. في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$. نعتبر المثلث ABC المتساوي الساقين رأسه الأساسي A، تحيط به الدائرة التي مركزها O ونصف قطرها 1. النقطة B تقع فوق محور الفواصل. يرمز H إلى المسقط العمودي للنقطة A على الحامل (BC).

العدد الحقيقي α يمثّل قيسا بالراديان للزاوية $(\vec{i};\overrightarrow{OB})$ حيث $\alpha \in [0;\pi]$.

- ما هي إحداثيات النقطة B؟

  عبّر عن الطولين BH و AH بدلالة α.

  استنتج مساحة المثلث ABC بدلالة α.

- f الدالة العددية المعرّفة على المجال $[0;\pi]$ بالدستور: $f(x)=(1+\cos x)\sin x$.

  أ- عيّن مشتقة الدالة f، وبيّن أنه من أجل كل x من المجال $[0;\pi]$،

  $f'(x)=2\cos^2 x+\cos x-1$.

  أستنتج أنه من أجل كل x من المجال $[0;\pi]$، $f'(x)=(2\cos x-1)(\cos x+1)$

  ب- أدرس إشارة العدد $f'(x)$، ثم ارسم جدول تغيرات الدالة f.

- بيّن أنه توجد قيمة للعدد α من اجلها تكون مساحة المثلث ABC أكبر ما يمكن.

  تعرّف على هذه المساحة العظمى.

- ما هي إذاً طبيعة المثلث ABC؟

3- الدالة الأسية- الدالة اللوغاريتمية

ما يجب أن يعرف:

الـــدالة الأسيـــة

تعريف

الدالة الأسية هي الدالة الوحيدة f التي تقبل الاشتقاق على R وتحقق المعادلة $f'=f$ و $f(0)=1$.

يرمز لها exp ونكتب: $f(x)=\exp(x)$ أو $f(x)=e^x$

وعموما: من اجل k عدد حقيقي، توجد دالة وحيدة f تقبل الاشتقاق على R وتحقق المعادلة $f'=kf$ و $f(0)=1$.

معرّفة بالدستور: $f(x)=e^{kx}$

للحفظ

x، a، b ثلاثة أعداد حقيقية.

خواص جبرية

$e^0=1$ ، $e^1=e$ ، $e^x>0$ ، $e^{a+b}=e^a\times e^b$

$e^{-a}=\frac{1}{e^a}$ ، $e^{a-b}=\frac{e^a}{e^b}$ ، $n\in Z / e^{nx}=(e^x)^n$

$e^a=e^b$ يكافئ $a=b$ ، $e^a<e^b$ يكافئ $a<b$

خواص تحليلية

الدالة exp معرّفة وقابلة للاشتقاق على R.

من أجل كل x من R، $(e^x)'=e^x$

إذا كانت f دالة قابلة للاشتقاق على D فإن الدالة e^f تقبل الاشتقاق على D. ولدينا: $(e^f)'=f'e^f$

الدالة exp متزايدة تماما على R. بجوار 0، $e^h\approx 1+h$

★ الدالة اللوغاريتم النيبيري

تعريف

الدالة اللوغاريتم النيبيري ويرمز لها ln هي دالة التقابل العكسي للدالة الأسية، ترفق بكل عدد حقيقي موجب تماما x العدد الحقيقي $\ln x$ والذي عدده الأسي يساوي x.

أي من أجل $x \in \mathbb{R}$ وَ $y \in]0;+\infty[$: ($e^{x} = y$ يكـــافئ $x = \ln y$)

$\ln e^{x} = x$ وَ $e^{\ln y} = y$

للحفظ — **خواص جبرية**

a وَ b عددان حقيقيان موجبان تماماً.

- $\ln e = 1$ ، $\ln 1 = 0$
- $\ln ab = \ln a + \ln b$
- $\ln \frac{1}{b} = -\ln b$
- $\ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b$
- $n \in \mathbb{Z}$ / $\ln(a^{n}) = n \ln a$
- $\ln \sqrt{a} = \frac{1}{2} \ln a$

للحفظ — **خواص تحليلية**

f دالة عددية معرّفة وقابلة للاشتقاق على D.

- الدالة ln معرّفة وقابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$.
- من أجل كل x من $]0;+\infty[$ ، $(\ln x)' = \frac{1}{x}$.
- إذا كانت $f \neq 0$ على D فإن $(\ln|f|)' = \frac{f'}{f}$.
- إذا كانت $f > 0$ على D فإن $(\ln f)' = \frac{f'}{f}$.
- بجوار 0، $\ln(1+h) \approx h$.

للحفظ

الدالة ln متزايدة تماما على $]0;+\infty[$.

من أجل a وَ b عنصران من $]0;+\infty[$ ، $\ln a = \ln b$ يكـــافئ $a = b$.

$\ln a < \ln b$ يكـــافئ $a < b$.

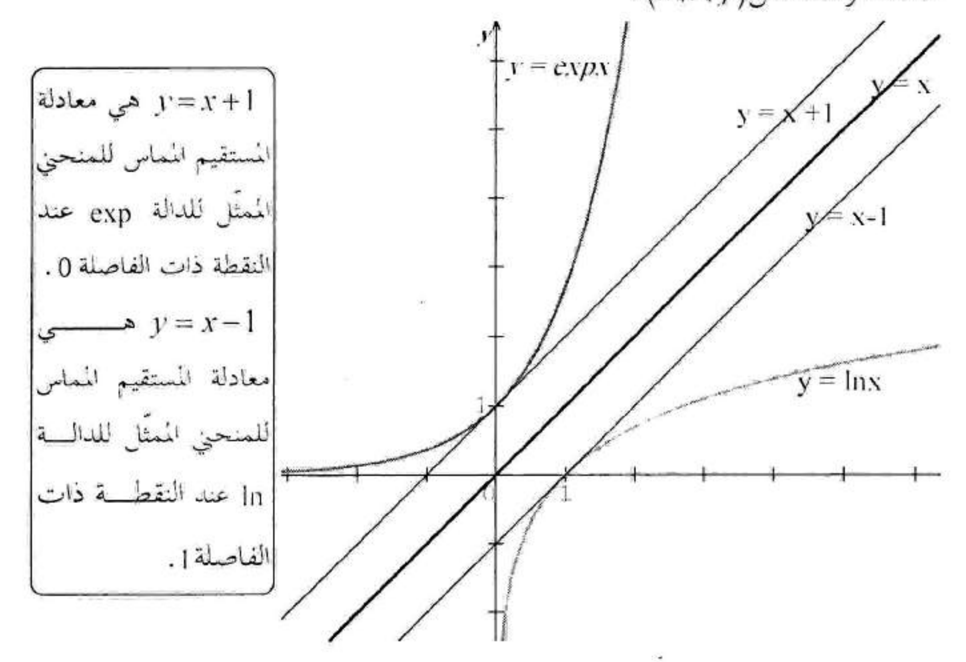
حالة خاصة

$\ln a < 0$ يكـــافئ $0 < a < 1$.

$\ln a > 0$ يكـــافئ $a > 1$.

◆ التمثيل البياني للدالتين الأسية واللوغاريتم النيبيري

للدالتين الأسية واللوغاريتم النيبيري تمثيلان بيانيان متناظران بالنسبة للمستقيم الذي معادلته $y = x$ (المنصف الأول) في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$.



◆ **نهايات الدالتين exp وَ ln**

للحفظ

الدالة الأسية	الدالة اللوغاريتم النيبيري
$\lim\limits_{x\to+\infty} e^{x} = +\infty$	$\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$
$\lim\limits_{x\to-\infty} e^{x} = 0^{+}$	$\lim\limits_{x\to0^{+}} \ln x = -\infty$
$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^{x}}{x} = +\infty$	$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0^{+}$
$\lim\limits_{x\to-\infty} xe^{x} = 0^{-}$	$\lim\limits_{x\to0^{+}} x\ln x = 0$
$n\in N^{*}\ /\ \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^{x}}{x^{n}} = +\infty$	$n\in N^{*}\ /\ \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x^{n}} = 0^{+}$
$n\in N^{*}\ /\ \lim\limits_{x\to-\infty} x^{n}e^{x} = 0$	$n\in N^{*}\ /\ \lim\limits_{x\to0^{+}} x^{n}\ln x = 0$
$\lim\limits_{x\to0} \dfrac{e^{x}-1}{x} = 1$	$\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\ln(x+1)}{x} = \lim\limits_{x\to1} \dfrac{\ln x}{x-1} = 1$

في جوار لانهاية، الدالة الأسية تتفوق على دالة القوة ذات الأس الحقيقي،
وتتفوق دالة القوة ذات الأس الحقيقي على الدالة اللوغاريتم النيبيري

◆ **اللوغاريتم العشري**

تعريف دالة اللوغاريتم العشري يرمز لها log ، ومعرّفة على $]0;+\infty[$
بما يلي: $\log x = \dfrac{\ln x}{\ln 10}$

$\log 10 = 1$

◆ **الدالة الأسية ذات الأساس a**

تعريف a عدد حقيقي موجب تماما حيث $a \neq 1$.
الدالة الأسية ذات الأساس a ، (دالة القوة الحقيقية) هي الدالة العددية التي يرمز
لها $\exp_{a}$ والمعرّفة على R بـ: $\exp_{a} x = e^{x\ln a}$
ونكتب : من أجل كل x من R ، $e^{x\ln a} = a^{x}$ (تجاوزاً)

للحفظ

a وَ a' عددان حقيقيان موجبان تماما ويختلفان عن 1.
x وَ y عددان حقيقيان.

$$\frac{a^{x}}{a^{y}} = a^{x-y} \quad , \quad a^{x+y} = a^{x}a^{y} \quad , \quad a^{0} = 1 \quad , \quad 1^{x} = 1$$

$$\left(\frac{a}{a'}\right)^{x} = \frac{a^{x}}{a'^{x}} \quad , \quad (aa')^{x} = a^{x}a'^{x} \quad , \quad (a^{x})^{y} = a^{xy}.$$

◆ **دالة الجذر النوني**

تعريف n عدد طبيعي غير معدوم.
دالة الجذر النوني، هي الدالة التي نرمز لها $\sqrt[n]{\ }$ والمعرّفة على $[0;+\infty[$
بـ: $\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$.
لدينا: من أجل كل x وَ y من $[0;+\infty[$ ، $x = y^{n}$ **يكافئ** $y = \sqrt[n]{x}$.

للحفظ

خواص جبرية

x وَ y عددان من $[0;+\infty[$ ، n وَ m عددان طبيعيان حيث $n \neq 0$
$\sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{y}$ يكافئ $x = y$ / $\sqrt[n]{x} < \sqrt[n]{y}$ يكافئ $x < y$
$\sqrt[n]{xy} = \sqrt[n]{x}\sqrt[n]{y}$ ، $\sqrt[n]{\dfrac{x}{y}} = \dfrac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}}$ حيث $y \neq 0$ ، $\sqrt[n]{x^{m}} = \left(\sqrt[n]{x}\right)^{m} = x^{\frac{m}{n}}$.

خواص تحليلية

- دالة الجذر النوني $\sqrt[n]{\ }$ معرّفة على $[0;+\infty[$ وقابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$.
- من أجل كل x من $]0;+\infty[$ ، $\left(\sqrt[n]{x}\right)' = \dfrac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}$.
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt[n]{x} = +\infty$

تمارين محلولة

مجموعة التعريف للدوال اللوغاريتم النبيري والدوال الأسية

1

عيّن مجموعة تعريف الدالة العددية f للمتغيّر الحقيقي x في كل حالة مما يلي:

$f(x)=\ln(2x^2-3x+1)$ ، $f(x)=\frac{\ln(-3x+9)}{\ln x-1}$

$f(x)=\frac{e^x+1}{e^{-x}-1}$ ، $f(x)=\ln\left(\sqrt{2x^2-3x}\right)$ ، $f(x)=e^{\frac{-x^2+1}{x}}$

$f(x)=\ln\left(\frac{2x-1}{x^2-1}\right)$ ، $f(x)=\sqrt{\ln x-1}$ ، $f(x)=\ln\left(\frac{e^x-1}{e^x+1}\right)$.

الحل: $f(x)=\ln(2x^2-3x+1)$, f معرّفة إذا وفقط إذا كان $(2x^2-3x+1)>0$

أي $x\in\left]-\infty;\frac{1}{2}\right[\cup]1;+\infty[$ إذاً: $D_f=\left]-\infty;\frac{1}{2}\right[\cup]1;+\infty[$

$f(x)=\frac{\ln(-3x+9)}{\ln x-1}$, f معرّفة إذا وفقط إذا كان

$(-3x+9)>0$ وَ $x>0$ وَ $\ln x-1\neq 0$

أي $x<3$ وَ $x>0$ وَ $x\neq e$ إذاً: $D_f=]0;e[\cup]e;3[$

$f(x)=\frac{e^x+1}{e^{-x}-1}$, f معرّفة إذا وفقط إذا كان $e^{-x}-1\neq 0$ أي $-x\neq 0$

إذاً: $D_f=\mathbb{R}-\{0\}$

$f(x)=\ln\left(\sqrt{2x^2-3x}\right)$, f معرّفة إذا وفقط إذا كان $2x^2-3x>0$ أي

$x\in]-\infty;0[\cup\left]\frac{3}{2};+\infty\right[$ إذاً : $D_f=]-\infty;0[\cup\left]\frac{3}{2};+\infty\right[$

$f(x)=e^{\frac{-x^2+1}{x}}$, f معرّفة إذا وفقط إذا كان $x\neq 0$ إذاً: $D_f=\mathbb{R}-\{0\}$

$f(x)=\ln\left(\frac{2x-1}{x^2-1}\right)$, f معرّفة إذا وفقط إذا كان $\left(\frac{2x-1}{x^2-1}\right)>0$

أي $x\in\left]-1;\frac{1}{2}\right[\cup]1;+\infty[$ إذاً: $D_f=\left]-1;\frac{1}{2}\right[\cup]1;+\infty[$

$f(x)=\sqrt{\ln x-1}$, f معرّفة إذا وفقط إذا كان $x>0$ وَ $\ln x-1>0$ أي $x>0$ وَ $x>e$ إذاً: $D_f=]e;+\infty[$

$f(x)=\ln\left(\frac{e^x-1}{e^x+1}\right)$ ، f معرّفة إذا وفقط إذا كان $e^x-1>0$ أي $x>0$

إذاً: $D_f=]0;+\infty[$.

معادلات ومتراجحات لوغاريتمية و أسية

2

حل في R المعادلات والمتراجحات التالية.

$\ln(2x+1)=2\ln(x-1)$	$\ln\sqrt{2x-3}>\ln(6-x)-\frac{1}{2}\ln x$
$\left(e^{x-1}+2\right)\left(e^{x+2}-1\right)=0$	$\frac{e^{2x-1}}{e^{3x+1}}\geq\frac{1}{e^2}$
$e^{6x}-4e^{3x}+3=0$	$e^x<e^{-x}+1$ ، $\ln\left(\frac{x-1}{2x-3}\right)\geq 0$

الحل: $\ln(2x+1)=2\ln(x-1)$ معرفة إذا وفقط إذا كان $2x+1>0$ وَ $x-1>0$

أي $x\in]1;+\infty[$

$\ln(2x+1)=2\ln(x-1)$ تكافئ $(2x+1)=(x-1)^2$ أي $x=0$ أو $x=4$.

بما أن $0\notin]1;+\infty[$ فإن مجموعة الحلول $S=\{4\}$.

$\left(e^{x-1}+2\right)\left(e^{x+2}-1\right)=0$ معرفة على كامل R

$\left(e^{x-1}+2\right)\left(e^{x+2}-1\right)=0$ تكافئ $\left(e^{x+2}-1\right)=0$ كون $\left(e^{x-1}+2\right)\neq 0$

تكافئ $x=-2$ إذاً مجموعة الحلول $S=\{-2\}$

$e^{6x}-4e^{3x}+3=0$ معرفة على كامل R

$e^{6x}-4e^{3x}+3=0$ تكافئ ($X=e^{3x}$ وَ $X^2-4X+3=0$)

تكافئ ($X=e^{3x}$ وَ $X=1$ أو $X=3$)

تكافئ ($e^{3x}=1$ أو $e^{3x}=3$) تكافئ ($x=0$ أو $x=\frac{1}{3}\ln 3$)

إذاً: مجموعة الحلول $S=\left\{0;\frac{1}{3}\ln 3\right\}$.

$\ln\sqrt{2x-3}>\ln(6-x)-\frac{1}{2}\ln x$ معرفة إذا وفقط إذا كان $2x-3>0$ وَ $6-x>0$ وَ $x>0$

أي $x\in\left]\frac{3}{2};6\right[$

$\ln\sqrt{2x-3}>\ln(6-x)-\frac{1}{2}\ln x$ تكافئ $\sqrt{2x-3}>\frac{6-x}{\sqrt{x}}$ أي $2x^2-3x>(6-x)^2$

تكافئ $x^2+9x-36>0$ أي $x\in\left]-\infty;-12\right[\cup\left]3;+\infty\right[$

إذاً: مجموعة الحلول $S=\left(\left]-\infty;-12\right[\cup\left]3;+\infty\right[\right)\cap\left]\frac{3}{2};6\right[$ أي $S=\left]3;6\right[$.

$\frac{e^{2x-1}}{e^{3x+1}}\geq\frac{1}{e^2}$ معرفة على كامل R

$\frac{e^{2x-1}}{e^{3x+1}}\geq\frac{1}{e^2}$ تكافئ $e^{2x+1}\geq e^{3x+1}$ أي $2x+1\geq 3x+1$ يكافئ $x\leq 0$

إذاً: مجموعة الحلول $S=\mathrm{R}$

$e^x<e^{-x}+1$ معرفة على كامل R

$e^x<e^{-x}+1$ تكافئ $e^{2x}-e^x-1<0$ تكافئ ($e^x=X$ وَ $X^2-X-1<0$)

تكافئ $e^x\in\left]0;\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right[$ أي $x\in\left]-\infty;\ln\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\right[$ وَ $S=\left]-\infty;\ln\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\right[$

$\ln\left(\frac{x-1}{2x-3}\right)\geq 0$ معرفة إذا وفقط إذا كان $\frac{x-1}{2x-3}>0$ أي $x\in\left]-\infty;1\right[\cup\left]\frac{3}{2};+\infty\right[$

$\ln\left(\frac{x-1}{2x-3}\right)\geq 0$ تكافئ $\left(\frac{x-1}{2x-3}\right)\geq 1$ أي $(-x+2)(2x-3)\geq 0$ أي $x\in\left[\frac{3}{2};2\right]$

وبالتالي: $x\in\left[\frac{3}{2};2\right]\cap\left(\left]-\infty;1\right[\cup\left]\frac{3}{2};+\infty\right[\right)$. إذاً: مجموعة الحلول $S=\left]\frac{3}{2};2\right]$.

حساب مشتقات لدوال لوغاريتمية أو أسية

3 عيّن الدالة المشتقة للدالة f في كل حالة.

$f(x)=\frac{1}{2}x^2-2\ln\frac{1}{x}$ ، $f(x)=\ln(-4x^2+1)$ ، $f(x)=x(\ln x^2)$

$f(x)=\ln\sqrt{1-x^2}$ ، $f(x)=\frac{e^{2x}+1}{e^x+2}$ ، $f(x)=\ln(e^x-1)$ ، $f(x)=2^x$.

الحل: $f(x)=\frac{1}{2}x^2-2\ln\frac{1}{x}$ معرّفة وقابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$ ، ولدينا:

$$f'(x)=x-2\frac{-1}{x^2}\times x=x+\frac{2}{x}.$$

$f(x)=\ln(-4x^2+1)$ معرّفة وقابلة للاشتقاق على $\left]-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right[$ ، ولدينا:

$$f'(x)=\frac{(-4x^2+1)'}{(-4x^2+1)^2}=\frac{-8x}{(-4x^2+1)^2}،$$

$f(x)=x(\ln x^2)$ معرّفة وقابلة للاشتقاق على $\mathrm{R}-\{0\}$ ، ولدينا:

$$f'(x)=(\ln x^2)+(\ln x^2)'x=\ln x^2+2،$$

$f(x)=\ln\sqrt{1-x^2}$ معرّفة وقابلة للاشتقاق على $]-1;1[$ ، ولدينا:

$$f'(x)=\frac{\left(\sqrt{1-x^2}\right)'}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{-x}{1-x^2}.$$

$f(x)=\frac{e^{2x}+1}{e^x+2}$ معرّفة وقابلة للاشتقاق على R ، ولدينا:

$$f'(x)=\frac{(e^{2x}+1)'(e^x+2)-(e^x+2)'(e^{2x}+1)}{(e^x+2)^2}=\frac{e^{3x}+4e^{2x}-e^x}{(e^x+2)^2}.$$

$f(x)=\ln(e^x-1)$ معرّفة وقابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$ ،

ولدينا: $f'(x)=\frac{(e^x-1)'}{e^x-1}=\frac{e^x}{e^x-1}$.

$f(x)=2^x$ وتكتب $f(x)=e^{x\ln 2}$، f قابلة للاشتقاق على R، ولدينا: $f'(x)=(\ln 2)e^{x\ln 2}=2^x\ln 2$.

حساب النهايات

4	احسب النهايات عند أطراف مجالات التعريف للدالة f في كل حالة. f معرّفة على $]0;+\infty[$ بالدستور: $f(x)=x-2\ln x$. f معرّفة على R بالدستور: $f(x)=x+1-e^x$. f معرّفة على $]0;+\infty[$ بالدستور: $f(x)=x\ln\left(\frac{1+x}{x}\right)$. f معرّفة على R بالدستور: $f(x)=\frac{2e^x+1}{e^x+1}$.

الحل: $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\>}}(x-2\ln x)=0-2(-\infty)=+\infty$ ،

$$\lim_{x\to+\infty}(x-2\ln x)=\lim_{x\to+\infty}x\left(1-2\frac{\ln x}{x}\right)=+\infty(1-0)=+\infty .$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(x+1-e^x\right)=\lim_{x\to+\infty}x\left(1+\frac{1}{x}-\frac{e^x}{x}\right)=+\infty(1+0-\infty)=-\infty .$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(x+1-e^x\right)=-\infty+1-0=-\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}x\ln\left(\frac{1+x}{x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln\left(\frac{1+x}{x}\right)}{\frac{1+x}{x}-1}\right)=1 \text{ ، } \lim_{\substack{x\to 0\\>}}x\ln\left(\frac{1+x}{x}\right)=\lim_{\substack{x\to 0\\>}}(1+x)\frac{\ln\left(\frac{1+x}{x}\right)}{\frac{1+x}{x}}=0 .$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{2e^x+1}{e^x+1}\right)=\frac{0+1}{0+1}=1 \text{ ، } \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2e^x+1}{e^x+1}\right)=\lim_{X\to+\infty}\left(\frac{2X+1}{X+1}\right)=2$$

الحساب على القوى الحقيقية والجذور النونية

5	بسّط الكتابتين التاليتين: $a=\frac{\sqrt[3]{3^2}\times\sqrt[4]{3^7}}{\sqrt[12]{3^5}}$ ، $b=\frac{2^{\sqrt{3}}\times 8^{\frac{1}{\sqrt{3}}}}{(0.5)^{\sqrt{3}}}$

الحل: $a=\frac{\sqrt[3]{3^2}\times\sqrt[4]{3^7}}{\sqrt[12]{3^5}}=\frac{3^{\frac{2}{3}}\times 3^{\frac{7}{4}}}{3^{\frac{5}{12}}}=3^{\frac{2}{3}+\frac{7}{4}-\frac{5}{12}}=9$.

$b=\frac{2^{\sqrt{3}}\times 8^{\frac{1}{\sqrt{3}}}}{(0.5)^{\sqrt{3}}}=2^{\sqrt{3}}\times\left(2^3\right)^{\frac{1}{\sqrt{3}}}\times 2^{\sqrt{3}}=2^{\sqrt{3}+\sqrt{3}+\sqrt{3}}=2^{3\sqrt{3}}$.

تمارين للتدريب

1. حل في R المعادلات والمتراجحات التالية.

$$e^x-2e^{\frac{x}{2}}-5=0 \text{ ، } e^{2x}-4e^{-2x}=3 \text{ ، } \frac{e^{2x}+2e^x-4}{2-3e^x}=-1$$

$$\ln\left(x^2-1\right)+2\ln 2=\ln(4x-1) \text{ ، } (\ln x)^2-3\ln x-28=0$$

$$e^{2x^2-3x-5}\geq e^4 \text{ ، } \frac{3e^{2x}-5e^x-1}{e^{2x}-4}\leq 1 \text{ ، } \ln|x-1|-\ln 5\geq\ln\frac{1}{|x+5|}$$

$$\ln\sqrt{4-x^2}\leq\frac{1}{2}\ln 3x \text{ ، } e^{2x}+e^x>2$$

2. حل في R×R كلا من الجمل التالية.

$$\begin{cases}\ln(xy)=3\\(\ln x)(\ln y)=2\end{cases} \text{ ، } \begin{cases}\frac{1}{\ln x}+\frac{1}{\ln y}=\frac{7}{3}\\ \ln(xy)=\frac{7}{2}\end{cases} \text{ ، } \begin{cases}x^2+y^2=169\\ \ln x+\ln y=1\end{cases} \text{ ، } \begin{cases}e^x+e^y=5\\e^{2(x+y)}=36\end{cases}$$

$$\begin{cases}\ln x-2\ln y=\ln 2\\ \frac{e^x}{e^5}=\left(\frac{1}{e^y}\right)^3\end{cases} \text{ ، } \begin{cases}e^x\times e^y=a^2\\ xy=1\end{cases}$$

(ناقش حسب قيم العدد الحقيقي الموجب a)

3. حساب النهايات

الدالة f معرّفة بالدستور	احسب نهاية f عند
$f(x)=\frac{e^x}{x}-x$	$-\infty$ وَ $+\infty$ وَ 0
$f(x)=e^{2x}-e^x$	$-\infty$ وَ $+\infty$
$f(x)=\frac{e^{2x}-1}{3x}$	$-\infty$ وَ $+\infty$ وَ 0
$f(x)=\frac{\ln(x+2)}{x+4}$	$+\infty$
$f(x)=\frac{\ln(x^2+x+1)}{2x}$	$-\infty$ وَ $+\infty$ وَ 0
$f(x)=\ln(e^{2x}-e^x+1)$	$-\infty$ وَ $+\infty$
$f(x)=x-\ln\left\|2e^x-1\right\|$	$-\infty$ وَ $+\infty$

4. f الدالة العددية المعرّفة على $]0;+\infty[$ بالدستور: $f(x)=2\ln x-(\ln x)^2$

- ادرس تغيرات الدالة f، ثم حل المعادلة $f(x)=0$.
- أعط معادلة ديكارتية للمماس (T) للمنحني (C) الممثّل للدالة f، عند النقطة ذات الفاصلة 1.
- أرسم (T) وَ (C) في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس.

5. g الدالة العددية المعرّفة على $]0;+\infty[$ بالدستور: $g(x)=1-x^2-\ln x$

- ادرس تغيرات الدالة g، ثم استنتج إشارة $g(x)$.
- f الدالة المعرّفة على $]0;+\infty[$ بالدستور: $f(x)=\frac{\ln x}{x}-x$. (C_f) تمثيلها البياني في المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

ادرس تغيرات الدالة f .(نستعين بنتائج السؤال الأول)

- أدرس وضعية المنحني (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ) الذي معادلته $y=-x$.
- بيّن أنه توجد نقطة وحيدة A من المنحني (C_f) يكون المماس عندها للمنحني (C_f)

يوازي المستقيم (Δ)، يطلب تعيين إحداثياتها. أنشئ (Δ) وَ (C_f).

6. f الدالة المعرّفة على $\mathbb{R}-\{1\}$ بالدستور: $f(x)=\frac{x+1}{-x+1}$ وَ (C_f) تمثيلها البياني في المستوي (P) المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

- بيّن أن النقطة A ذات الإحداثيات $(1;-1)$ هي مركز تناظر للمنحني (C_f)، ثم أنشئ (C_f).
- g الدالة العددية المعرّفة على $\mathbb{R}^*$ بالدستور: $g(x)=\frac{e^x+1}{-e^x+1}$

بيّن أن الدالة g فردية، ثم احسب نهاياتها عند أطراف مجالات التعريف.

- تعرّف على اتّجاه تغيّر الدالة g وارسم تمثيلها البياني (C_g) في المستوي (P).
- h الدالة العددية المعرّفة على $\mathbb{R}_+^*-\{e\}$ بالدستور: $h(x)=\frac{\ln x+1}{-\ln x+1}$

أدرس تغيرات h ، ثم بيّن أن h تقابل من المجال $\left]1;\sqrt{e}\right]$ نحو $[1;3]$.

استخرج عبارة $h^{-1}(x)$ من أجل $x\in[1;3]$.

7. f الدالة العددية المعرّفة على $\mathbb{R}$ بالدستور: $f(x)=e^x-x-4$.

- ادرس تغيرات الدالة f. بيّن أن المستقيم (D) الذي معادلته $x+y+4=0$ هو مستقيم مقارب للمنحني (C_f) بجوار $-\infty$، ثم ادرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى (D).
- أرسم (C_f) وَ (D).

8. f الدالة العددية المعرّفة على $]-1;+\infty[$ بالدستور: $f(x)=x-\ln(x+1)$

- احسب نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة تعريفها.
- ادرس تغيرات الدالة f وارسم تمثيلها البياني. استنتج إشارة الدالة f على المجال $]-1;+\infty[$.
- باستعمال إشارة f، تحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n، لدينا:

$$\ln\left(\frac{1}{n}+1\right)<\frac{1}{n}$$

- استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n، لدينا: $\left(\frac{1}{n}+1\right)^n<e$

9. f الدالة العددية المعرّفة على $]1;+\infty[$ بالدستور: $f(x)=\frac{1}{2}x+\ln\left(\frac{x-1}{3x+4}\right)$ وَ (C_f) تمثيلها البياني في المستوي (P) المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

- ادرس تغيرات الدالة f.
- بيّن أن المستقيم (D) الذي معادلته $y=\frac{1}{2}x-\ln 3$ هو مستقيم مقارب للمنحني (C_f).
- ثم ادرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى (D).
- ارسم المستقيم (D) والمنحني (C_f).
- g الدالة العددية المعرّفة على $]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$ بالدستور: $g(x)=f(|x|)$.
- علّل زوجية الدالة g.
- باستعمال الدراسة السابقة للدالة f، ارسم جدولا كاملا لتغيرات للدالة g.
- اشرح كيف يمكننا رسم التمثيل البياني (C_g) للدالة g انطلاقا من (C_f).
- ارسم (C_g).

10. f الدالة العددية المعرّفة على R كما يلي:

$$\begin{cases} f(x)=e^{x}-x & /x<0 \\ f(x)=\cos^2 \pi x & /0\le x\le 1 \\ f(x)=1+\frac{\ln x}{x} & /x>1 \end{cases}$$

ادرس استمرارية وقابلية اشتقاق الدالة f. ثم تغيرات الدالة f وارسم (C_f).

4- المتتاليات العددية

ما يجب أن يعرف:

★ عمومـــيات

تعريف

n_0 عدد طبيعي معطى.

المتتالية العددية u هي كل دالة من N نحو R، والتي ترفق بكل عدد طبيعي n أكبر من أو يساوي n_0، العدد الحقيقي $u(n)$.

المجموعة I حيث $I=\{n : n\in N / n\ge n_0\}$ تدعى مجموعة تعريف المتتالية العددية u. (مجال من N يبدأ من n_0)

يرمز كذلك للمتتالية العددية u بــ: $(u_n)_{n\ge n_0}$ أو $(u_n)_{n\in I}$.

أو يستعمل الرمز (u_n) مع ذكر مجموعة تعريفها.

يرمز كذلك للعدد الحقيقي $u(n)$ بــ: u_n ويدعى الحد العام للمتتالية العددية u.

◆ طريقتي توليد متتالية عددية

تتعيّن متتالية عددية بإحدى الطريقتين:

- تعطى عبارة حدها العام، أي عبارة u_n بدلالة n (دستور الدالة f) ونكتب: $u_n=f(n)$.

  f تدعى الدالة المرفقة بالمتتالية العددية u.

- تعطى علاقة بين حدود متعاقبة للمتتالية العددية(تدعى علاقة تراجعية).

  – هنا نكتفي بالعلاقة بين حدين متتاليين– ونكتب: $u_{n+1}=f(u_n)$.

  f تدعى الدالة المرفقة بالمتتالية العددية u.

  f تحقق أنه من أجل كل x من D_f لدينا: $f(x)\in D_f$ وَ $u_{n_0}\in D_f$.

◆ **اتجاه تغيّر متتالية عددية.**

(u_n) متتالية عددية معرّفة على I حيث $I=\{n:n\in N/n\geq n_0\}$

وَ n_0 عدد طبيعي معطى.

(u_n) متزايدة تماما على I **معناه** [من أجل كل n من I، $u_{n+1}-u_n>0$].

(u_n) متناقصة تماما على I **معناه** [من أجل كل n من I، $u_{n+1}-u_n<0$].

(u_n) متزايدة على I **معناه** [من أجل كل n من I، $u_{n+1}-u_n\geq 0$].

(u_n) متناقصة على I **معناه** [من أجل كل n من I، $u_{n+1}-u_n\leq 0$].

(u_n) ثابتة على I **معناه** [من أجل كل n من I، $u_{n+1}-u_n=0$].

طريقة

لتعيين اتجاه تغيّر متتالية عددية على I، ندرس إشارة الفرق $u_{n+1}-u_n$

أو نقارن النسبة $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ مع 1، وهذا فقط في حالة (u_n) موجبة تماماً.

حالة خاصة1.

من أجل المتتالية المعرّفة بـ: $u_n=f(n)$ على المجموعة $I=\{n:n\in N/n\geq n_0\}$.

إذا كانت الدالة f متزايدة (أو متناقصة) على $[n_0;+\infty[$ فإن المتتالية (u_n)

متزايدة (أو متناقصة) على I.

أنتبه: عكس هذه النتيجة غير صحيح

حالة خاصة2.

من أجل المتتالية المعرّفة بالعلاقة التراجعية: $u_{n+1}=f(u_n)$ على المجموعة $I=\{n:n\in N/n\geq n_0\}$

لدينا: $u_{n+1}-u_n=f(u_n)-u_n=f(x)-x$، للتعرّف على اتجاه تغيّر المتتالية (u_n) يكفي دراسة إشارة الفرق $f(x)-x$ على المجموعة D_f.

أو لدينا: $u_{n+2}-u_{n+1}=f(u_{n+1})-f(u_n)$، للتعرّف على اتجاه تغيّر المتتالية (u_n) يكفي دراسة اتجاه تغيّر الدالة f على D_f.

◆ **المتتالية العددية المحدودة**

(u_n) متتالية عددية معرّفة على I حيث $I=\{n:n\in N/n\geq n_0\}$ وَ n_0 عدد طبيعي معطى.

- المتتالية (u_n) محدودة من الأعلى بالعدد الحقيقي M **إذا وفقط إذا** كان من أجل كل n من I، $u_n\leq M$.
- المتتالية (u_n) محدودة من الأسفل بالعدد الحقيقي m **إذا وفقط إذا** كان من أجل كل n من I، $u_n\geq m$.
- المتتالية (u_n) محدودة **إذا وفقط إذا** كانت المتتالية (u_n) محدودة من الأعلى ومن الأسفل.

◆ **متتاليات مرجعية ونهاياتها**

المتتاليات المعرّفة بحدها العام n^2 ، n^3 ، $\sqrt{n}$ هي مرجعية نهايتها هي $+\infty$.

المتتاليات المعرّفة بحدها العام $\frac{1}{n}$ ، $\frac{1}{n^2}$ ، $\frac{1}{n^3}$ ، $\frac{1}{\sqrt{n}}$ هي مرجعية نهايتها هي 0.

◆ **المتتالية المتقاربة والمتتالية المتباعدة**

تعريف

المتتالية العددية **المتقاربة** نحو العدد الحقيقي l هي التي تقبل نهاية محدودة l عندما ينتهي n إلى $+\infty$.

المتتالية العددية **المتباعدة** هي المتتالية العددية غير المتقاربة.

طريقة

(u_n) متتالية عددية معرّفة على I حيث $I=\{n:n\in N/n\geq n_0\}$ وَ n_0 عدد طبيعي معطى.

- للبرهان أن المتتالية (u_n) متقاربة نحو 0. يمكننا أن نبيّن أنه:
يوجد عدد طبيعي n' بحيث، (**إذا كان** $n\geq n'$ **فإن** $|u_n|\leq kv_n$)
حيث: (v_n) متتالية مرجعية متقاربة نحو 0، وَ $k\in R^*$.
- للبرهان أن المتتالية (u_n) متقاربة نحو العدد الحقيقي l. يمكننا أن نبيّن أن المتتالية (u_n-l) متقاربة نحو 0. ويمكننا أن نبيّن كذلك أنه: يوجد عدد طبيعي n' بحيث: (**إذا كان** $n\geq n'$ **فإن** $w_n\leq u_n\leq v_n$)
حيث: (v_n) وَ (w_n) متتاليتان مرجعيتان متقاربتان نحو l.

مبرهنة1

كل متتالية متقاربة هي متتالية محدودة.

كل متتالية متزايدة ومحدودة من الأعلى هي متتالية متقاربة.

كل متتالية متناقصة ومحدودة من الأسفل هي متتالية متقاربة.

◆ المتتاليتان المتجاورتان

تعريف (u_n) وَ (v_n) متتاليتان عدديتان متجاورتان **معناه** (u_n) متزايدة وَ (v_n) متناقصة وَ $\lim_{n\to+\infty}(u_n - v_n)=0$

مبرهنة2

كل متتاليتين متجاورتين هما متتاليتين متقاربتين نحو نفس العدد الحقيقي l.

ملاحظة

- إذا كانت $(u_n)_{n\in I}$ وَ $(v_n)_{n\in I'}$ متتاليتان عدديتان متجاورتان، حيث (u_n) متزايدة وَ (v_n) متناقصة فإنه، من أجل كل عدد طبيعي n من $I\cap I'$ لدينا: $u_n \le v_n$.
- إذا كانت $(u_n)_{n\in I}$ وَ $(v_n)_{n\in I'}$ متتاليتان عدديتان متجاورتان، حيث (u_n) متزايدة وَ (v_n) متناقصة وكانت لهما نفس النهاية l فإنه، من أجل كل عدد طبيعي n من $I\cap I'$ لدينا: $u_n \le u_{n+1} \le l \le v_{n+1} \le v_n$

مبرهنة3

(u_n) متتالية معرّفة بـالعلاقة التراجعية: $u_{n+1}=f(u_n)$.

إذا كانت (u_n) متقاربة نحو l وكانت الدالة f مستمرة عند l فإن، $f(l)=l$

◆ المتتالية الحسابية

(u_n) متتالية عددية معرّفة على I حيث $I=\{n : n\in N / n\ge n_0\}$ وَ n_0 عدد طبيعي معطى.

- المتتالية (u_n) حسابية حدها الأول u_{n_0} وأساسها r إذا وفقط إذا كانت معرّفة
بـ: $u_{n+1}=u_n+r$ من أجل كل n من I (العلاقة التراجعية)
أو $u_n=u_{n_0}+(n-n_0)r$ من أجل كل n من I (عبارة الحد العام)
- من أجل كل عددين طبيعيين n وَ p من I ، لدينا: $u_n=u_p+(n-p)r$
- من أجل كل عددين طبيعيين n وَ p من I حيث: $p\le n$،
لدينا: $u_p+u_{p+1}+...+u_n=\frac{n-p+1}{2}(u_n+u_p)$
$(n-p+1)$ يمثّل عدد الحدود المتتالية التي تجمع من u_p إلى u_n.
- التمثيل البياني للمتتالية الحسابية (u_n) هو مجموعة النقط $M(n;u_n)$ التي تنتمي إلى المستقيم الذي معامل توجيهه الأساس r.

◆ المتتالية الهندسية

(u_n) متتالية عددية معرّفة على I حيث $I=\{n : n\in N / n\ge n_0\}$ وَ n_0 عدد طبيعي معطى.

- المتتالية (u_n) هندسية حدها الأول u_{n_0} وأساسها q إذا وفقط إذا كانت معرّفة
بـ: $u_{n+1}=u_n\times q$ من أجل كل n من I (العلاقة التراجعية)
أو $u_n=u_{n_0}\times q^{(n-n_0)}$ من أجل كل n من I (عبارة الحد العام)
- من أجل كل عددين طبيعيين n وَ p من I ، لدينا: $u_n=u_p\times q^{(n-p)}$
- من أجل كل عددين طبيعيين n وَ p من I حيث: $p\le n$،
لدينا: $u_p+u_{p+1}+...+u_n=u_p\times\frac{1-q^{(n-p+1)}}{1-q}$ حيث $q\ne 1$.
$(n-p+1)$ يمثّل عدد الحدود المتتالية التي تجمع من u_p إلى u_n.

نهايات متتالية هندسية:

إذا كان $q>1$ فإن $\lim_{n\to+\infty} q^n=+\infty$ ، إذا كان $q=1$ فإن $\lim_{n\to+\infty} q^n=1$

إذا كان $-1<q<1$ فإن $\lim_{n\to+\infty} q^n=0$ ، إذا كان $q\le -1$ فإن $\lim_{n\to+\infty} q^n$ غير موجودة

◆ **البرهان بالتراجع**

P_n خاصية متعلّقة بالعدد الطبيعي n من المجموعة I حيث: $I=\{n: n\in N / n\geq n_0\}$

وَ n_0 عدد طبيعي معطى.

للبرهان بالتراجع على أن الخاصية P_n صحيحة من أجل كل n من I ، نتّبع المراحل الثلاث التالية:

① نتحقق من صحّة الخاصية P_{n_0} (هذه المرحلة تدعى **بداية التراجع**)

② نفرض أن الخاصية P_n صحيحة إلى غاية الرتبة k حيث: $k \geq n_0$.

(هذه المرحلة تدعى **فرضية التراجع**)

③ نبرهن أن الخاصية P_{k+1} صحيحة. (هذه المرحلة تدعى **برهان التراجع**)

(المرحلتين ②وَ ③ تدعى استلزام التراجع)

تمــارين محــلولة

البرهان بالتراجع

1	برهن بالتراجع صحّة العبارتين التاليتين. من أجل كل n من N^* ، $1^2+2^2+...+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$. من أجل كل n من N ، $3^{2n}-2^n$ يقبل القسمة على 7 .

<u>**الحل**</u>: من أجل كل n من N^* ، $\underbrace{1^2+2^2+...+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)}_{P_n}$.

نتحقق من صحة الخاصية P_1 . $P_1: 1^2=\frac{1}{6}1(1+1)(2\times1+1)$ محققة

نفرض صحة الخاصية P_n إلى الرتبة k حيث: $1 \leq k$. أي أن:

$1^2+2^2+...+k^2=\frac{1}{6}k(k+1)(2k+1)$ صحيحة فرضاً.

نبرهن صحّة الخاصة P_{k+1} أي نبيّن أن: $1^2+2^2+...+(k+1)^2=\frac{1}{6}(k+1)(k+2)(2k+3)$

لدينا:

$$\begin{aligned}1^2+2^2+...+(k+1)^2 &= 1^2+2^2+..k^2+(k+1)^2\\ &= \frac{1}{6}k(k+1)(2k+1)+(k+1)^2\\ &= \frac{1}{6}(k+1)[k(2k+1)+6(k+1)]=\frac{1}{6}(k+1)(k+2)(2k+3)\end{aligned}$$

من أجل كل n من N ، $\underbrace{3^{2n}-2^n=7\alpha \quad \alpha\in N/}_{P_n}$

نتحقق من صحة الخاصية P_0 . $P_0: 3^0-2^0=1-1=0=7\times 0$ محققة

نفرض صحة الخاصية P_n إلى الرتبة k حيث: $k\geq 0$. أي أن:

$3^{2k}-2^k=7\alpha \quad \alpha\in N/$ صحيحة فرضاً.

نبرهن صحّة الخاصة P_{k+1} أي نبيّن أن: $3^{2(k+1)}-2^{(k+1)}=7\beta \quad \beta\in N/$

لدينا:

$$\begin{aligned}3^{2(k+1)}-2^{(k+1)} &= 3^2\times3^{2k}-2\times2^k=9(7\alpha+2^k)-2\times2^k\\ &= 63\alpha+7\times2^k=7(9\alpha+2^k)=7\beta\end{aligned}$$

حيث $\beta=(9\alpha+2^k)\in N$

اتجاه تغيّر متتالية عددية

2	تعرّف على اتجاه تغيّر المتتالية العددية في كل حالة. (u_n) متتالية عددية معرّفة على N بالعبارة: $u_n=\frac{n+4}{n+2}$. (k_n) متتالية عددية معرّفة على N بالعبارة: $k_n=\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}$. (v_n) متتالية عددية معرّفة على N بحدها الأول $v_0=1$ والعلاقة التراجعية: $v_{n+1}=2+\ln v_n$

الحل: (u_n) متتالية عددية معرّفة على N بالعبارة: $u_n=\dfrac{n+4}{n+2}$

لدينا: من اجل كل n من N، $u_{n+1}-u_n=\dfrac{n+5}{n+3}-\dfrac{n+4}{n+2}=\dfrac{-2}{(n+2)(n+3)}<0$

إذاً المتتالية (u_n) متناقصة تماماً على N.

• (k_n) متتالية عددية معرّفة على N بالعبارة: $k_n=\dfrac{n(n+2)}{(n+1)^2}$

(يمكن العمل بطريقة المثال الأول كما يمكن العمل بالطريقة التالية)

نعتبر الدالة f المعرّفة على $\mathbb{R}-\{-1\}$ بالدستور $f(x)=\dfrac{x(x+2)}{(x+1)^2}$ وندرس اتجاه تغيراها فقط على $\mathbb{R}_+$.

من أجل كل x من $\mathbb{R}_+$، $f'(x)=\dfrac{2}{(x+1)^3}>0$ أي f متزايدة تماما على $\mathbb{R}_+$؟

وبالتالي المتتالية (k_n) متزايدة تماماً على N.

• (v_n) متتالية عددية معرّفة على N بحدها الأول $v_0=1$ والعلاقة التراجعية: $v_{n+1}=2+\ln v_n$.

للتعرّف على تغيراها نتبع ما يلي:

نعتبر الدالة f المعرّفة على $\mathbb{R}_+^*$ بالدستور $f(x)=2+\ln x$ وندرس اتجاه تغيراها على $\mathbb{R}_+^*$.

اتجاه تغير الدالة f نفسه اتجاه تغير الدالة $\ln$ كون: $f=\ln+2$ إذاً f متزايدة تماما على $\mathbb{R}_+^*$.

لدينا: $v_{n+1}-v_n=f(v_n)-f(v_{n-1})$ نعتمد إذاً على اتجاه تغيّر الدالة f وعلى البرهان بالتراجع لمقارنة v_{n+1} وَ v_n.

$v_0=1$ وَ $v_1=2$ أي $v_1>v_0$ (بداية التراجع)

نفرض ان $v_{k+1}>v_k$ حيث $k\in N$ (فرضية التراجع)

وبما أن f متزايدة تماما على $\mathbb{R}_+^*$ فإن $v_{k+1}>v_k$ تستلزم $f(v_{k+1})>f(v_k)$ أي

$v_{k+2}>v_{k+1}$ (برهان التراجع)

إذاً: من اجل كل n من N، $v_{n+1}>v_n$ وبالتالي: (v_n) متزايدة تماما على N.

دراسة تقارب متتالية عددية

3

• بيّن أن المتتاليات العددية التالية متقاربة.

(u_n) معرّفة على N^* بالعبارة: $u_n=\dfrac{n+4}{n^2}$.

(v_n) معرّفة على N بالعبارة: $v_n=\dfrac{n^2-1}{n^2-n+2}$.

(k_n) معرّفة على N بالعبارة: $k_n=\dfrac{n-11}{2^n}$.

(w_n) معرّفة على N بالعبارة: $w_n=\dfrac{3^n+2^n}{4^n-5^n}$.

• بيّن أن المتتالية (h_n) المعرّفة على N بالعبارة: $h_n=\dfrac{n^3-1}{n^2+2}$ متباعدة

الحل: (u_n) معرّفة على N^* بالعبارة: $u_n=\dfrac{n+4}{n^2}$.

نعتبر الدالة f المعرّفة على $\mathbb{R}^*$ بالدستور $f(x)=\dfrac{x+4}{x^2}$. لدينا $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$

إذاً: $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=0$، وبالتالي، (u_n) متقاربة نحو 0.

(v_n) معرّفة على N بالعبارة: $v_n=\dfrac{n^2-1}{n^2-n+2}$. نعتبر الدالة f المعرّفة على $\mathbb{R}$ بالدستور $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x^2-x+2}$. ولدينا $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=1$.

إذاً: $\lim\limits_{n\to+\infty}v_n=1$. وبالتالي، (v_n) متقاربة نحو 1.

(k_n) معرّفة على N بالعبارة: $k_n=\dfrac{n+11}{2^n}$.

نلاحظ أنه: من اجل كل n من N، $\dfrac{n+11}{2^n}>0$. معناه أن المتتالية (k_n) محدودة من الأسفل.

ولدينا: $k_{n+1}-k_n=\dfrac{1}{2^{n+1}}(n+12-2n-22)=-\dfrac{n+10}{2^{n+1}}<0$ معناه أن المتتالية

(k_n) متناقصة تماما على N .

كون المتتالية (k_n) متناقصة تماما ومحدودة من الأسفل ، فهي متقاربة.

(w_n) معرّفة على N بالعبارة: $w_n = \frac{3^n+2^n}{4^n-5^n}$. ولدينا:

$$\lim_{n\to+\infty} w_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{5^n\left(\left(\frac{3}{5}\right)^n+\left(\frac{2}{5}\right)^n\right)}{5^n\left(\left(\frac{4}{5}\right)^n-1\right)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\left(\frac{3}{5}\right)^n+\left(\frac{2}{5}\right)^n}{\left(\frac{4}{5}\right)^n-1} = \frac{0+0}{0-1} = 0$$

يعني أن (w_n) متقاربة نحو 0 .

المتتالية (h_n) المعرّفة على N^* بالعبارة: $h_n = \frac{n^3-1}{n^2+2}$ متباعدة كون

$\lim_{n\to+\infty} h_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^3}{n^2} = +\infty$ (نهاية غير محدودة).

المتتاليتان المتجاورتان

4

(u_n) وَ (v_n) متتاليتان معرّفتان على N^* بــ:

$u_n = 1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+...+\frac{1}{n^2}$ وَ $v_n = u_n+\frac{1}{n}$

بيّن أن المتتاليتان (u_n) وَ (v_n) متجاورتان.

الحل: لدينا من اجل كل n من N ،

$$u_{n+1}-u_n = \left(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+...+\frac{1}{(n+1)^2}\right)-\left(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+...+\frac{1}{n^2}\right) = \frac{1}{(n+1)^2} > 0$$

و لدينا من اجل كل n من N ، $v_{n+1}-v_n = \left(u_{n+1}+\frac{1}{n+1}\right)-\left(u_n+\frac{1}{n}\right) = \frac{-1}{n(n+1)^2} < 0$

يعني أن (u_n) متزايدة تماما على N وَ أن (v_n) متناقصة تماما على N .

وكذلك لدينا: $\lim_{n\to+\infty}(u_n-v_n) = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n} = 0$ إذاً المتتاليتان (u_n) وَ (v_n) متجاورتان.

المتتالية الهندسية

5

نعرّف المتتاليتين (u_n) وَ (v_n) على المجموعة N بــ: $u_0 = 1$ ،
$v_0 = 2$ وَ من أجل كل n من N ،
$u_{n+1} = \frac{u_n+2v_n}{3}$ وَ $v_{n+1} = \frac{u_n+4v_n}{5}$.

- نضع: $w_n = v_n - u_n$ من أجل كل n من N .
بيّن أن (w_n) متتالية هندسية يطلب تعيين نهايتها والتعبير w_n عن بدلالة n .
- عبّر عن العددين $u_{n+1}-u_n$ وَ $v_{n+1}-v_n$ بدلالة w_n ، واستنتج اتجاه تغيّر المتتاليتين (u_n) وَ (v_n) .
- بيّن أن المتتاليتان (u_n) وَ (v_n) متقاربتان ولهما نفس النهاية l .
- نضع: $t_n = 3u_n+10v_n$ من أجل كل n من N . بيّن أن المتتالية (t_n) ثابتة واستنتج قيمة l .

الحل: واضح أن (w_n) متتالية عددية كمجموع المتتاليتين (u_n)- وَ (v_n) .

من أجل كل n من N ،

$$w_{n+1} = v_{n+1}-u_{n+1} = \frac{u_n+4v_n}{5}-\frac{u_n+2v_n}{3} = \frac{3u_n+12v_n-5u_n-10v_n}{15} = \frac{2}{15}w_n$$

يعني أن المتتالية (w_n) هندسية أساسها $\frac{2}{15}$ وحدها الأول $w_0 = v_0-u_0 = 1$

بما أن $\frac{2}{15}\in]-1;1[$ فإن $\lim_{+\infty} w_n = 0$. ولدينا من أجل كل n من N ،

$w_n = w_0\left(\frac{2}{15}\right)^n = \left(\frac{2}{15}\right)^n$.

من أجل كل n من N ، $u_{n+1}-u_n = \frac{u_n+2v_n}{3}-u_n = \frac{u_n+2v_n-3u_n}{3} = \frac{2}{3}w_n$

وَ $v_{n+1}-v_n = \frac{u_n+4v_n}{5}-v_n = \frac{u_n+4v_n-5v_n}{5} = -\frac{1}{5}w_n$

بما أنه من أجل كل n من N ، $w_n=\left(\frac{2}{15}\right)^n>0$. فإن $u_{n+1}-u_n>0$ وَ $v_{n+1}-v_n<0$

أي (u_n) متزايدة تماما على N وَ (v_n) متناقصة تماما على N .

حسب ما سبق لدينا (u_n) متزايدة تماما على N وَ (v_n) متناقصة تماما على N وَ $\lim\limits_{+\infty}(v_n-u_n)=0$ هذا يعني أن

المتتاليتان (u_n) وَ (v_n) متجاورتان، وبالتالي فهما متقاربتان ولهما نفس النهاية l.

من أجل كل n من N، $t_{n+1}=3u_{n+1}+10v_{n+1}=3\frac{u_n+2v_n}{3}+10\frac{u_n+4v_n}{5}=t_n$

يعني أن المتتالية (t_n) ثابتة.

إذاً: $\lim\limits_{+\infty}t_n=\lim\limits_{+\infty}t_0=23$ ومن جهة أخرى

$$\lim_{+\infty}t_n=\lim_{+\infty}(3u_n+10v_n)=3l+10l=13l$$

منه $13l=23$ أي $l=\frac{23}{13}$.

تمارين للتدريب

1. نقبل أن الكثير حدود ذو المعاملات الحقيقية $P(x)=\frac{1}{3}x^3+ax^2+bx$ يحقق المساواة التالية: من اجل كل x من R، $P(x+1)-P(x)=x^2$

- بدون تعيين العددين a وَ b أحسب $P(-1)$، $P(1)$، $P(0)$. احسب إذاً العددين a وَ b.
- برهن بالتراجع أنه: من أجل كل n من N، $P(n)$ عدد طبيعي.
- نضع: $S_1=1$، وَمن أجل كل n من N، $S_n=1+2^2+...+n^2$ بيّن أن
$$S_n=P(n+1)=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$
- (u_n) متتالية معرّفة على N بـ: $u_0=0$ وَمن أجل كل n من N، $u_{n+1}=\sqrt{2+u_n}$
- برهن بالتراجع أنه: من أجل كل n من N، المتتالية (u_n) موجبة.
- اكتشف وبرهن بالتراجع اتجاه تغيّر المتتالية $(u_n)_{n\in N}$.

2. (u_n) متتالية عددية معرّفة على N بـ: $u_0=8$ وَمن اجل كل n من N،
$$u_{n+1}=\frac{5u_n-4}{u_n}$$

- مثّل في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$ الدالة $f:x\mapsto\frac{5x-4}{x}$ والمستقيم (Δ) الذي معادلته $y=x$.
- مثّل بيانيا الحدود u_0، u_1، u_2. هل يمكننا التوقع بتقارب المتتالية (u_n)؟
- بيّن أن المتتالية (u_n) متناقصة ومحدودة من الأسفل، ثم عيّن نهايتها.

3. من اجل كل n من $N-\{0.1\}$، نعرّف على المجال $]0.+\infty[$ الدالة f_n بالدستور $f_n(x)=x^n(2\ln x-1)$

- عيّن الدالة المشتقة f'_n، ثم بيّن أنها تنعدم مرة واحدة على المجال $]0.+\infty[$ عند العدد الحقيقي α_n يطلب تعيينه.
- بيّن أنه من اجل كل n من $N-\{0.1\}$، $1\le\alpha_n<\sqrt{e}$.
- ادرس اتجاه تغيّر المتتالية العددية (α_n)، ثم حدد سلوكها بجوار $+\infty$.

4. (u_n) متتالية عددية موجبة معرّفة على N^* بـ: $u_1=1$ وَمن اجل كل n من $N^*-\{1\}$، $n^2u_n^2-(n-1)^2u_{n-1}^2=n$.

(v_n) المتتالية العددية المعرّفة على N^* بـ: $v_n=n^2u_n^2$. عيّن v_n بدلالة n واستنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة وعيّن نهايتها.

5. (u_n) متتالية معرّفة على N بـ: $u_0=-1$ وَمن أجل كل n من N،
$$u_{n+1}=\frac{9}{6-u_n}$$

- بيّن أن المتتالية (u_n) محدودة من الأعلى بالعدد 3. بيّن أن المتتالية (u_n) متقاربة واحسب نهايتها.
- $(v_n)_{n\in N}$ متتالية معرّفة بـ: $v_n=\frac{-1}{3-u_n}$ بيّن أن المتتالية (v_n) حسابية، يطلب تعيين حدها الأول وأساسها.

أحسب v_n ثم u_n بدلالة n، ثم أوجد نهاية (u_n).

6. (u_n) متتالية معرّفة على N^* بـــ: $u_1 = 7$ وَمن أجل كل n من N^*،

$u_{n+1} = au_n + 5$ حيث: $a \in \mathrm{R}$.

نضع: من اجل كل n من N^*، $v_n = u_n - 6$

- عيّن العدد الحقيقي a حتى تكون (v_n) متتالية هندسية، يطلب تعيين حدها الأول وأساسها.
- فيما يلي نعتبر $a = \frac{1}{6}$، احسب إذن v_n بدلالة n ثم نهاية (v_n).
- نضع: $S_n = \sum_{i=1}^{i=n} v_i$، أحسب S_n بدلالة n، وادرس تقارب المتتالية $(S_n)_{n\in N^*}$، ثم احسب نهايتها.

7. نعرّف متتاليتين عدديتين u وَ v بــ: $u_1 = 1$ وَ $v_1 = 12$

وَمن اجل كل n من N^*، $u_{n+1} = \frac{1}{3}(u_n + 2v_n)$ وَ $v_{n+1} = \frac{1}{4}(u_n + 3v_n)$.

- من اجل كل n من N^* نضع: $w_n = v_n - u_n$ بيّن أن (w_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها.
- أحسب w_1 ثم عبّر عن w_n بدلالة n، أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n$.
- بيّن أن المتتالية u متزايدة وأن المتتالية v متناقصة، بالاستعانة بالسؤال الأول.
- ماذا تستنتج عن المتتاليتين u وَ v ؟.
- من اجل كل n من N^* نضع: $k_n = 8v_n + 3u_n$ بيّن أن المتتالية (k_n) ثابتة.
- استنتج نهايتي كلا u وَ v.

8. g الدالة المعرّفة على $]-3;+\infty[$ بالدستور: $g(x) = \ln(x+3)$.

- ادرس تغيرات الدالة g.
- (u_n) المتتالية العددية المعرّفة على N بــ: $u_0 = 1$ وَمن أجل كل n من N،

$u_{n+1} = g(u_n)$

باستعمال السؤال الأول ــ تعرّف على اتجاه تغير المتتالية (u_n).

- بيّن أن المتتالية (u_n) محدودة من الأعلى بالعدد 2. هل هي متقاربة؟ تعرّف على $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.
- (v_n) المتتالية العددية المعرّفة على N بــ: $v_0=2$ وَمن أجل كل n من N، $v_{n+1} = g(v_n)$

بيّن أن المتتالية (v_n) محدودة من الأسفل بالعدد 1. هل هي متقاربة؟ تعرّف على $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.

- بيّن أن $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$، استنتج أن المتتاليتان (u_n) وَ(v_n) متجاورتان.
- f الدالة المعرّفة على R بالدستور: $f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$ وَ h الدالة المعرّفة على R بالدستور: $h(x) = f(x) - \frac{x}{2}$.

ادرس تغيرات الدالة h، واستنتج إشارة العدد $h(x)$ حسب قيم x.

- (w_n) المتتالية العددية المعرّفة على N بــ: $w_0 = 1$ وَمن أجل كل n من N،

$w_{n+1} = f(w_n)$

بيّن أنه: من أجل كل n من N، $0 \le w_{n+1} \le \frac{1}{2} w_n$ واستنتج أن: $0 \le w_n \le \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

تعرّف على $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n$.

9. (u_n) المتتالية العددية المعرّفة بــ: $u_0 = 3$ وَمن أجل كل n من N، $u_{n+1} = \frac{2}{1+u_n}$

- بيّن أنه: من أجل كل n من N، $0 \le u_n \le 3$.

واستنتج أن هذه المتتالية (u_n) معرّفة فعلا على N.

- نضع: $a_n = u_{2n}$ وَ $b_n = u_{2n+1}$ من اجل كل n من N.

ادرس اتجاه تغيّر المتتاليتين العدديتين (a_n) وَ (b_n).

- بيّن أنه: من أجل كل n من N، $b_n \le 1 \le a_n$.
- استنتج أن المتتالية (u_n) إذا تقاربت فهي تتقارب نحو 1.

10. (k_n) المتتالية العددية المعرّفة بــ: $k_0 = 1$ وَمن أجل كل n من N،

$k_{n+1} = \sin k_n$

- بالاستعانة بالحاسبة، أعط تخمينا حول سلوك المتتالية (k_n).
- بيّن أنه: من أجل كل n من N، $k_n \in [0;1]$
- ادرس إشارة الدالة $x \mapsto x - \sin x$ على المجال $[0;1]$ واستنتج اتجاه تغيّر المتتالية (k_n).
- ماذا يمكننا أن نستنتج فيما يخص المتتالية (k_n)؟

5- الحساب التكامـــلي

ما يجب أن يعرف:

★ التكامل المحدود

تعريف

f دالة عددية للمتغيّر الحقيقي x و F دالة أصلية لها على المجال I. ليكن a و b عددان من I.

التكامل (**من** a **إلـــى** b) للدالة f هو العدد الحقيقي $F(b)-F(a)$.

ونرمز: $\int_a^b f(x)\,dx = F(b)-F(a) = [F(x)]_a^b$

★ خواص التكامل المحدود

f و g دالتان مستمرتان على المجال I. a، b، c أعداد من I.

◆ **علاقة شال**

$$\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx$$

ينتج أن: $\int_a^a f(x)dx = 0$, $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

◆ **الخطـية**

$$k\in\mathbb{R} / \int_a^b (kf)(x)dx = k\int_a^b f(x)dx, \quad \int_a^b (f+g)(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

◆ **المتباينات والتكامل المحدود**

في حالة $a \le b$: **إذا كان** من أجل كل x من المجال $[a;b]$، $f(x)\ge 0$ **فـإن** $\int_a^b f(x)dx \ge 0$

في حالة $a < b$: **إذا كان** من أجل كل x من المجال $]a;b[$، $f(x) > 0$ **فـإن** $\int_a^b f(x)dx > 0$

وعمومـــاً

في حالة $a \le b$: **إذا كان** من أجل كل x من المجال $[a;b]$، $f(x) \ge g(x)$ **فـــإن**

$$\int_a^b f(x)dx \ge \int_a^b g(x)dx$$

في حالة $a < b$: **إذا كان** من أجل كل x من المجال $]a;b[$، $f(x) > g(x)$ **فـــإن**

$$\int_a^b f(x)dx > \int_a^b g(x)dx$$

◆ **القيمـــة المتوســـطة**

إذا كان $a < b$ **فـإن** القيمة المتوسطة للدالة f على المجال $[a;b]$ هو العدد الحقيقي

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

◆ **حصر القيمـــة المتوســـطة**

في حالة $a < b$: **إذا كان** من أجل كل x من المجال $[a;b]$، $m \le f(x) \le M$ **فـإن**

$$m \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \le M.$$

★ التكامل بالتجزئة

f و g دالتان قابلتان للاشتقاق على المجال I، و المشتقتين f' و g' مستمرتين على المجال I. a و b عددان من I.

لدينا: $\int_a^b f(x)g'(x)dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b g(x)f'(x)dx$

مبرهنة1

إذا كانت الدالة f مستمرة على المجال I فـــإنه من أجل كل عدد a من I، الدالة F المعرّفة بـ: $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ هي الدالة الأصلية للدالة f على المجال I والتي تنعدم عند a.

★ حساب المساحات

المستوي منسوب إلى معلم متعامد $(O;\vec{i};\vec{j})$، نضع: $\vec{i}=\overrightarrow{OI}$، $\vec{j}=\overrightarrow{OJ}$ وَ $OIKJ$ مستطيل.
مساحة المستطيل $OIKJ$ تمثّل وحدة القياس للمساحات في المعلم $(O;\vec{i};\vec{j})$. ونرمز: $u.a$

◆ التفسير الهندسي للتكامل المحدود

f دالة عددية للمتغيّر الحقيقي x. a وَ b عددان من I حيث: $a\le b$
التكامل من a إلى b للدالة $|f|$ هو المساحة A للحيّز المستوي المحصور بين المنحني (C_f) الممثل للدالة f وحامل محور الفواصل والمستقيمين اللذين معادلتهما $x=a$ وَ $x=b$.

- في حالة $f\ge 0$ في المجال $[a;b]$: لدينا $A=\int_a^b f(x)dx\,(u.a)$
- في حالة $f\le 0$ في المجال $[a;b]$: لدينا $A=-\int_a^b f(x)dx\,(u.a)$

◆ مساحة الحيّز المحصور بين منحنيين

f وَ g دالتان مستمرتان على المجال $[a;b]$. (C_f) وَ (C_g) تمثيلاهما البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد $(O;\vec{i};\vec{j})$.
المساحة A للحيّز المستوي المحدد بالمنحنيين (C_f) وَ (C_g) والمستقيمين الذين معادلتهما $x=a$ وَ $x=b$ يعطى بـــ:

$$A=\int_a^b|f(x)-g(x)|dx\,(u.a)$$

◆ حساب الحجوم

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$. نضع: $\vec{i}=\overrightarrow{OI}$ ، $\vec{j}=\overrightarrow{OJ}$ ، $\vec{k}=\overrightarrow{OK}$
القطع المستقيمة $[OI]$، $[OJ]$، $[OK]$ هي أضلاع في متوازي المستطيلات الذي حجمه يمثّل وحدة القياس للحجوم.

جسم S محدّد بالمستويين اللذين معادلتهما: $z=a$ وَ $z=b$. حيث: $a\le b$
كل مستو معادلته $z=x$ حيث: $x\in[a;b]$ يقطع الجسم S وفق مقطع مستو مساحته $s(x)$ (وحدة مساحة).
إذا كانت الدالة s مستمرة على المجال $[a;b]$ فإن الحجم V للجسم S يعطى بالعلاقة:

- $V=\int_a^b s(x)dx$ (وحدة الحجم).

نتيجة: f دالة مستمرة على المجال $[a;b]$ وَ (C_f) تمثيلها البياني.
Γ الحيّز المستوي المحدّد بالمنحني (C_f) والمستقيمات $y=0$ ، $x=a$ وَ $x=b$.
حجم الجسم الدوراني المولّد بدوران Γ حول محور الفواصل يعطى بالعبارة: $V=\int_a^b \pi f(x)dx$.

تمــارين محـــلولة

حساب التكاملات

1	علما أنها موجودة، أحسب التكاملات التالية: $\int_{-1}^{2}(2x^3-x+2)dx$, $\int_2^0 t(t^2-1)dt$ ، $\int_2^{-3}e^{1-2x}dx$ ، $\int_e^1 x\ln x\,dx$ $\int_\pi^{\pi/2}2\cos u\sin^2 u\,du$ ، $\int_0^\pi x\sin x\,dx$.

الحل: $\int_{-1}^{2}(2x^3-x+2)dx=\left[\frac{1}{2}x^4-\frac{1}{2}x^2+2x\right]_{-1}^{2}=(8-2+4)-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}-2\right)=12$

$\int_2^0 t(t^2-1)dt=\frac{1}{2}\int_2^0(t^2-1)'(t^2-1)dt=\frac{1}{4}\left[(t^2-1)^2\right]_2^0=\frac{1}{4}-\frac{9}{4}=-2$

$\int_2^{-3}e^{1-2x}dx=-\frac{1}{2}\int_2^{-3}-2e^{1-2x}dx=-\frac{1}{2}\left[e^{1-2x}\right]_2^{-3}=-\frac{e^7}{2}+\frac{e^{-3}}{2}$

$\int_e^1 x\ln x\,dx$ نكامل بالتجزئة. لدى نضع: ($f(x)=\ln x$ وَ $g'(x)=x$)
ينتج أن: ($f'(x)=\frac{1}{x}$ وَ $g(x)=\frac{1}{2}x^2$).

إذاً: $\int_e^1 x\ln x\,dx = \int_e^1 f(x)g'(x)dx = \left[f(x)g(x)\right]_e^1 - \int_e^1 g(x)f'(x)dx = \left[\frac{1}{2}x^2 \ln x\right]_e^1 - \frac{1}{2}\int_e^1 x\,dx$

$$= -\frac{e^2}{2} - \frac{1}{4}\left(1-e^2\right) = -\frac{1}{4}\left(1+e^2\right)$$

$$\int_\pi^{\pi/2} 2\cos u \sin^2 u\, du = 2\int_\pi^{\pi/2}(\sin u)'\sin^2 u\,du = 2\left[\frac{1}{3}\sin^3 x\right]_\pi^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{3}$$

$\int_0^\pi x\sin x\,dx$ نكامل بالتجزئة. لدى نضع: ($f(x)=x$ وَ $g'(x)=\sin x$)

ينتج أن: ($f'(x)=1$ وَ $g(x)=-\cos x$)

إذاً: $\int_0^\pi x\sin x\,dx = \int_0^\pi f(x)g'(x)dx = \left[f(x)g(x)\right]_0^\pi - \int_0^\pi g(x)f'(x)dx$

$$= \left[-x\cos x\right]_0^\pi + \int_0^\pi \cos x\,dx = \pi$$

حساب التكاملات

2	علما أنها موجودة، أحسب التكاملات التالية: $\int_1^2 \ln t\,dt$ ، $\int_0^1 \ln(t+2)dt$ ، $\int_0^\pi e^t \sin t\,dt$ $\int_\pi^0 e^t\cos 2t\,dt$ ، $\int_e^1 \frac{\ln x}{x^2}dx$ ، $\int_0^1 \frac{t}{\sqrt{t+1}}dt$.

<u>الحل:</u> $\int_1^2 \ln t\,dt$ نكامل بالتجزئة. نضع: $\begin{cases} u(t)=\ln t \\ v'(t)=1 \end{cases}$ ينتج أن $\begin{cases} u'(t)=\frac{1}{t} \\ v(t)=t \end{cases}$

إذاً: $\int_1^2 \ln t\,dt = \left[u(t)v(t)\right]_1^2 - \int_1^2 u'(t)v(t)dt = \left[t\ln t\right]_1^2 - \left[t\right]_1^2 = 2\ln 2 - 1$.

$\int_0^1 \ln(t+2)dt$ نكامل بالتجزئة. نضع: $\begin{cases} u(t)=\ln(t+2) \\ v'(t)=1 \end{cases}$

ينتج أن $\begin{cases} u'(t)=\frac{1}{t+2} \\ v(t)=t+2 \end{cases}$

إذاً: $\int_0^1 \ln(t+2)dt = \left[u(t)v(t)\right]_0^1 - \int_0^1 u'(t)v(t)dt = \left[(t+2)\ln(t+2)\right]_0^1 - \int_0^1 dt$

$$= 3\ln 3 - 2\ln 2 - 1$$

$I=\int_0^\pi e^t \sin t\,dt$ نكامل بالتجزئة. نضع: $\begin{cases} u(t)=e^t \\ v'(t)=\sin t \end{cases}$ ينتج أن $\begin{cases} u'(t)=e^t \\ v(t)=-\cos t \end{cases}$

إذاً: $I=\int_0^\pi e^t \sin t\,dt = \left[u(t)v(t)\right]_0^\pi - \int_0^\pi u'(t)v(t)dt = \left[-e^t\cos t\right]_0^\pi + \int_0^\pi e^t\cos t\,dt$

$$= e^\pi + 1 + J$$

نحسب من جديد التكامل $J=\int_0^\pi e^t\cos t\,dt$ بالتجزئة. نضع $\begin{cases} f(t)=e^t \\ g'(t)=\cos t \end{cases}$

ينتج أن $\begin{cases} f'(t)=e^t \\ g(t)=\sin t \end{cases}$

إذاً: $J = \int_0^\pi e^t\cos t\,dt = \left[f(t)g(t)\right]_0^\pi - \int_0^\pi f'(t)g(t)dt$

$$= \left[e^t\sin t\right]_0^\pi - \int_0^\pi e^t\sin t\,dt = -I$$

ينتج بالعودة إلى الحساب الأول: $I = e^\pi+1-I$ وبالتالي: $I=\frac{1}{2}\left(e^\pi+1\right)$

$K=\int_\pi^0 e^t\cos 2t\,dt$ نكامل بالتجزئة. نضع: $\begin{cases} u(t)=e^t \\ v'(t)=\cos 2t \end{cases}$

ينتج أن $\begin{cases} u'(t)=e^t \\ v(t)=\frac{1}{2}\sin 2t \end{cases}$

إذاً: $K = \int_\pi^0 e^t\cos 2t\,dt = \left[u(t)v(t)\right]_\pi^0 - \int_\pi^0 u'(t)v(t)dt$

$$= \left[\frac{1}{2}e^t\sin 2t\right]_\pi^0 - \frac{1}{2}\int_\pi^0 e^t\sin 2t\,dt = -\frac{1}{2}L$$

نحسب من جديد التكامل $L=\int_\pi^0 e^t\sin 2t\,dt$ بالتجزئة. نضع $\begin{cases} f(t)=e^t \\ g'(t)=\sin 2t \end{cases}$

ينتج أن $\begin{cases} f'(t)=e^t \\ g(t)=-\frac{1}{2}\cos 2t \end{cases}$.

إذاً: $L=\int_\pi^0 e^t \sin 2t\,dt=[f(t)g(t)]_\pi^0-\int_\pi^0 f'(t)g(t)dt=\left[-\frac{1}{2}e^t\cos 2t\right]_\pi^0+\frac{1}{2}\int_\pi^0 e^t\cos 2t\,dt$

$$=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}e^\pi+\frac{1}{2}K$$

ينتج بالعودة إلى الحساب الأول: $K=-\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}(e^\pi-1)+\frac{1}{2}K\right]$ وبالتالي: $K=\frac{1}{5}(-e^\pi+1)$

$\int_e^1 \frac{\ln x}{x^2}dx$ نكامل بالتجزئة. نضع: $\begin{cases} u(t)=\ln x \\ v'(t)=\frac{1}{x^2} \end{cases}$ ينتج أن $\begin{cases} u'(t)=\frac{1}{x} \\ v(t)=-\frac{1}{x} \end{cases}$

إذاً: $\int_e^1\frac{\ln x}{x^2}dx=[u(t)v(t)]_e^1-\int_e^1 u'(t)v(t)dt=\left[-\frac{\ln x}{x}\right]_e^1+\int_e^1\frac{1}{x^2}dx=\frac{2}{e}-1$.

$\int_0^1\frac{t}{\sqrt{t+1}}dt$ نكامل بالتجزئة. نضع: $\begin{cases} u(t)=t \\ v'(t)=\frac{1}{\sqrt{t+1}} \end{cases}$ ينتج أن $\begin{cases} u'(t)=1 \\ v(t)=2\sqrt{t+1} \end{cases}$

إذاً: $\int_0^1\frac{t}{\sqrt{t+1}}dt=[u(t)v(t)]_0^1-\int_0^1 u'(t)v(t)dt=\left[2t\sqrt{t+1}\right]_0^1-2\int_0^1\sqrt{t+1}dt$

$$=2\sqrt{2}-\frac{4}{3}\left(2^{\frac{3}{2}}-1\right)=\frac{-2\sqrt{2}+4}{3}$$

حساب المساحات

3

نعتبر المنحني (C) الذي معادلته $y=\frac{-x^3+x}{x^2+1}$ في المعلم المتعامد $(O;\vec{i};\vec{j})$.

- بين أن (C) يقبل مستقيم مقارب (Δ) عند $+\infty$ وَ $-\infty$.
- احسب مساحة الحيّز المستوي المحدد بالمنحني (C) وَ المستقيم (Δ) والمستقيمين اللذين معادلتهما $x=2$ وَ $x=-2$.

الحل: لدينا من اجل كل x من R، $y=\frac{-x^3+x}{x^2+1}=\frac{-x(x^2+1)+2x}{x^2+1}=-x+\frac{2x}{x^2+1}$

وبما أن: $\lim_{|x|\to+\infty}\left(\frac{2x}{x^2+1}\right)=0$ فإن المنحني (C) يقبل مستقيم مقارب مائل (Δ) معادلته $y=-x$ عند $+\infty$ وَ $-\infty$.

الحيّز هو مجموعة النقط $M(x;y)$ حيث:

$(-2\le x\le 0$ وَ $\frac{-x^3+x}{x^2+1}\le y\le -x)$ أو $(0\le x\le 2$ وَ $-x\le y\le\frac{-x^3+x}{x^2+1})$

مساحته هي $\int_0^2[y-(-x)]dx+\int_{-2}^0[-x-y]dx\quad(u.a)$

وهي: $\int_{-2}^0\frac{-2x}{x^2+1}dx+\int_0^2\frac{2x}{x^2+1}dx\quad(u.a)=\left[\ln(x^2+1)\right]_{-2}^0-\left[\ln(x^2+1)\right]_0^2$

$$=2\ln 5\quad(u.a)$$

حساب مساحة الحيّز المحصور بين منحنيين

4

f وَ g الدالتان المعرّفتان على R بـ: $f(x)=\cos x$ وَ $g(x)=\sin x$

احسب مساحة الحيّز المستوي المحدّد بالمنحنيين (C_f) وَ (C_g) الممثلين للدالتين f وَ g وبالمستقيمين اللذين معادلتهما $x=0$ وَ $x=\pi$.

الحل: مساحة الحيّز تعطى بالتكامل المحدود: $\int_0^\pi|\cos x-\sin x|dx\quad(u.a)$

و علما أنه: من اجل كل x من $\left[0;\frac{\pi}{4}\right]$ فإن $\cos x-\sin x\ge 0$

و من اجل كل x من $\left[\frac{\pi}{4};\pi\right]$ فإن $\cos x-\sin x\le 0$

إذاً: $\int_0^\pi|\cos x-\sin x|dx\,(u.a)=\left(\int_0^{\pi/4}(\cos x-\sin x)dx+\int_{\pi/4}^{\pi}(\sin x-\cos x)dx\right)(u.a)$

$$=\left([\sin x+\cos x]_0^{\pi/4}+[-\cos x-\sin x]_{\pi/4}^{\pi}\right)(u.a)$$

$$=2\sqrt{2}(u.a)$$

حساب الحجم

5	نعتبر الدالة f للمتغيّر الحقيقي x المعرّفة على المجال $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ بالدستور $f(x)=\cos x$. نعتبر مساحة الحيّز Ω المستوي المحصور بين المنحني الممثّل للدالة f ومحور الفواصل في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس. أحسب حجم الجسم الدوراني الناتج من دوران الحيّز Ω حول محور الفواصل.

الحل: لدينا

$$V=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\pi f^2(x)dx=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\pi\cos^2 x dx=\frac{\pi}{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}(\cos 2x+1)dx$$

$$=\frac{\pi}{2}\left[\frac{1}{2}\sin 2x+x\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi^2}{2}(u.v)$$

تمارين للتدريب

1. احسب التكاملات المحدودة التالية بعد التأكد من وجودها.

$$\int_{\pi}^{0}-\sin 3x\,dx\ ,\ \int_{0}^{\pi/4}\frac{2\,dt}{\cos^2 t}\ ,\ \int_{1}^{\ln 2}\left(u-2+3e^{2u}\right)du\ .$$

$$\int_{0}^{1}\sqrt{3x+1}\,dx\ ,\ \int_{\pi/4}^{\pi/6}\tan^2 x\,dx\ ،\ \int_{-1}^{1}\frac{2x}{\left(x^2+2\right)^2}dx\ ,\ \int_{1}^{0}\frac{1-2x}{\sqrt{x^2-x+3}}dx$$

$$\int_{2}^{3}\frac{\ln x}{x}dx\ ,\ \int_{0}^{1}xe^{x^2}dx\ ,\ \int_{e}^{e^2}\frac{dt}{t\ln t}\ ,\ \int_{0}^{\pi/4}\tan^5 t\left(1+\tan^2 t\right)dt$$

2. باستعمال المكاملة بالتجزئة، احسب التكاملات المحدودة التالية:

$$\int_{1}^{e}t\ln t\,dt\ ,\ \int_{1}^{-2}xe^{5x}\,dx\ ,\ \int_{2}^{0}(x-2)e^{1+2x}\,dx\ ,\ \int_{1}^{e}x^2\ln x\,dx\ .$$

$$\int_{1}^{2}(\ln t)^2\,dt\ ,\ \int_{2}^{1}\ln\left(\frac{x-1}{x}\right)dx\ ،\ \int_{1}^{0}\frac{u}{\sqrt{2+u}}du\ ,\ \int_{\pi}^{3\pi/2}x^2\cos 2x\,dx$$

$$\int_{1}^{2}\sin(\ln t)\,dt\ ,\ \int_{0}^{\pi}e^{t}\sin t\,dt\ ,\ \int_{-1}^{1}(2x+3)^2e^{x}\,dx\ ,\ \int_{e}^{1}t(\ln t)^2\,dt$$

3. f الدالة المعرّفة على $\mathbb{R}^*$ بالدستور: $f(x)=\frac{-x^3+2x^2+3x+2}{x^2}$

اكتب الدالة f على شكل مجموع دوال بسيطة، ثم احسب $\int_{2}^{1}f(x)\,dx$.

g الدالة المعرّفة على $\mathbb{R}-\{-2;2\}$ بالدستور: $g(x)=\frac{x^2}{x^2-4}$

عيّن ثلاثة أعداد حقيقية a، b، c بحيث من اجل كل x من $\mathbb{R}-\{-2;2\}$، $g(x)=a+\frac{b}{x-2}+\frac{c}{x+2}$. احسب إذاً: $\int_{1}^{1}g(x)\,dx$

h الدالة المعرّفة على $\mathbb{R}-\{2\}$ بالدستور: $h(x)=\frac{2x^2-x+1}{(x-1)^2}$

عيّن ثلاثة أعداد حقيقية a، b، c بحيث من اجل كل x من $\mathbb{R}-\{2\}$، $h(x)=a+\frac{b}{x-1}+\frac{c}{(x-1)^2}$. احسب إذاً: $\int_{-1}^{0}h(x)\,dx$.

4. f الدالة المعرّفة على $\mathbb{R}^*$ بالدستور: $f(x)=\frac{e^x+2}{e^x-1}$

عيّن عددين حقيقيين a، b بحيث من اجل كل x من $\mathbb{R}^*$، $f(x)=a+\frac{be^x}{e^x-1}$،

ثم أحسب $\int_{1}^{2}f(x)\,dx$.

5. احسب القيمة المتوسطة للدالة f على المجال I في كل حالة:

$f(x)=2x^2+5x-1$ و $I=[-1,3]$ ، $f(x)=\ln(x-1)$ و $I=[2;4]$ ،

$f(x)=e^{3x}$ و $I=[0,3]$ ، $f(x)=\sin^2 x$ و $I=\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$

$f(x)=\cos^4 x$ و $I=\left[-\frac{\pi}{3},0\right]$ ، $f(x)=x^2e^{x^3}$ و $I=[-1,0]$

6. (u_n) متتالية عددية معرّفة على N بالعبارة: $u_n = 2\int_0^1 \frac{t^{2n+1}}{t^2+1}dt$

- بيّن أنه من أجل كل n من N، $u_n \geq 0$.
- بيّن أنه من أجل كل n من N، $u_{n+1}+u_n = \frac{1}{n+1}$.
- احسب الحدود u_0، u_1، u_2.
- بيّن أن (u_n) متناقصة على N، واستنتج أنها متقاربة، ثم تعرّف على نهايتها.

7. f الدالة المعرّفة على $[-1,1]$ بالدستور: $f(x)=\sqrt{1-x^2}$

- ارسم التمثيل البياني للدالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.
- g الدالة المعرّفة على $[0,\pi]$ بالدستور: $g(x)=F(\cos x)$ حيث F دالة أصلية للدالة f على $[-1,1]$.

بيّن أنه من أجل كل x من $[0,\pi]$، $g'(x)=\frac{1}{2}(\cos 2x-1)$، ثم استنتج دالة أصلية للدالة g' على $[0,\pi]$.

- احسب بدلالة F العدد: $g(0)-g(\pi)$، ثم احسب $\int_{-1}^{1} f(t)\,dt$.

ماذا تمثل النتيجة المحصّل عليها؟

8. f الدالة المعرّفة على R بالدستور: $f(x)=-x+\frac{3}{2}+\frac{-x}{x^2+1}$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$. (الوحدة $2cm$)

- ادرس تغيرات الدالة f، وبيّن أن المستقيم (D) ذي المعادلة $y=-x+\frac{3}{2}$ هو مستقيم مقارب للمنحني (C_f).
- ارسم (D) وَ (C_f).
- احسب بالسنتيمتر المربع مساحة الحيّز المستوي المحدّد بالمنحني (C_f) والمستقيم (D) وبالمستقيمين ذي المعادلتين $x=-1$ وَ $x=2$.

9. φ الدالة المعرّفة على R بالدستور: $\varphi(x)=(x-1)e^{x+1}$

(C_φ) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$. (الوحدة $1cm$)

ادرس تغيرات الدالة φ و ارسم تمثيلها البياني (C_φ).

احسب مساحة الحيّز المستوي المحدّد بالمنحني (C_φ) والمستقيمات التي معادلاتها: $y=0$ وَ $x=-1$ وَ $x=\frac{3}{2}$.

احسب مساحة الحيّز المستوي المحدّد بالمنحني (C_φ) والمستقيمات التي معادلاتها: $y=0$ وَ $x=1$ وَ $x=-1$.

استنتج مساحة الحيّز المستوي المحدّد بالمنحني (C_φ) وحامل محور الفواصل والمستقيمين اللذين معادلتهما: $x=\frac{3}{2}$ وَ $x=-1$.

10. f الدالة المعرّفة على R بـ: $f(0)=1$ وَ من اجل $x\neq 0$،

$$f(x)=\frac{x}{e^x-1}$$

- بيّن أن الدالة f مستمرة على R، ثم أحسب العدد $f'(x)$ من أجل كل x من R^*.
- g الدالة المعرّفة على R بـ: $g(x)=e^x-xe^x-1$
- ادرس تغيرات الدالة g، وتعرّف على إشارة العدد $g(x)$ على R ثم استنتج إشارة $f'(x)$.

أعط اتجاه تغيّر الدالة f.

- علّل وجود العدد $h(x)$ من أجل كل x من R حيث: $h(x)=\int_x^{2x} f(t)dt$
- عبّر عن الدالة h باستعمال الدالة F حيث F هي دالة أصلية للدالة f على R.
- استنتج أن الدالة h تقبل الاشتقاق على R وبيّن أنه من أجل كل x من R،

$$h'(x)=\frac{x}{e^{2x}-1}(3-e^x)$$

- تعرّف على اتجاه تغيّر الدالة h.
- باستعمال خاصية الحصر للقيمة المتوسطة لدالة، بيّن أنه من أجل كل x من R^*، العدد $h(x)$ يقع بين $f(x)$ وَ $f(2x)$.

ميّز بين الحالتين $x<0$ وَ $x>0$. أحسب إذاً $\lim_{x\to+\infty} h(x)$ وَ $\lim_{x\to-\infty}\frac{h(x)}{x}$،

ثم استنتج $\lim_{x\to-\infty} h(x)$.

6- الاحتمـالات

ما يجب أن يعرف:

★ العـــدّ

◆ عاملي عدد طبيعي

تعريف

n عدد طبيعي أكبر من أو يساوي 1.

عاملي n، هو العدد الطبيعي الذي نرمز له: $n!$ والذي يساوي جداء الأعداد الطبيعية من 1 إلى n.

نكتب: $n!=1\times 2\times 3\times ...\times n$. نقبل أن: $0!=1$

◆ عدّ السلاسل

تجربة عشوائية تكمن في سحب p عنصر على التوالي من وعاء U يحوي n عنصر.

الوعاء U يعتبر مجموعة ذات n عنصر، ومخارج هذه التجربة تشكّل سلاسل ذات p عنصر من U.

- **السحب بالإرجاع**

عدد السلاسل ذات p عنصر من U، هو: $n^p=\underbrace{n\times n\times ...\times n}_{p\ \text{عامل}}$ (هذه السلاسل تدعى قوائم)

- **السحب بدون إرجاع**

عدد السلاسل ذات p عنصر **مختلفة** من U، هو: $\underbrace{n\times(n-1)\times(n-2)...\times(n-p+1)}_{p\ \text{عامل}}$

(هذه السلاسل تدعى ترتيبات)

◆ توفيقـــات

تعريف

E مجموعة ذات n عنصر، p عدد طبيعي حيث: $0\le p\le n$

توفيقة ذات p عنصر من E، هي مجموعة جزئية من E تضم p عنصر.

(تكرار العناصر غير ممكن وترتيبها غير مهم)

عدد التوفيقات ذات p عنصر من المجموعة E ذات n عنصر يرمز له $\binom{n}{p}$

أو C_n^p ويعطى بالعبارة: $C_n^p=\binom{n}{p}=\frac{n!}{p!(n-p)!}$

للحفظ

n وَ p عددان طبيعيان حيث: $0\le p\le n$

- $C_n^p=C_n^{n-p}$, $C_n^1=n$, $C_n^n=1$, $C_n^0=1$
- من أجل $1<p\le n$،

$C_{n-1}^{p-1}+C_{n-1}^{p}=C_n^p$ (قاعدة تشكيل مثلث باسكال)

- من أجل كل عددين حقيقيين a وَ b وَ من أجل كـل n مـن N^*:

$$(a+b)^n=\sum_{k=0}^{k=n}C_n^k a^{n-k}b^k$$

دستور ثنائي الحد للنيوتن

★ الفضاء الاحتمالي المنته

◆ مجموعة الإمكانيات–الحوادث

تعريف

نتائج التجربة العشوائية تشكّل مجموعة منتهية تدعى **مجموعة الإمكانيات**(مجموعة المخارج) يرمز لها Ω.

كل جزء A من المجموعة Ω يدعى **حادثة**.

مجموعة أجزاء Ω هي مجموعة **جميع الحوادث** المرتبطة بالتجربة العشوائية ويرمز لها $P(\Omega)$.

◆ مصطلحات على الحوادث

للحفظ

المصطلح الرياضي	المصطلح الاحتمالي
$A=\phi$	A الحادثة المستحيلة
$A=\Omega$	A الحادثة الأكيدة
$A=\{e_i\}$	A الحادثة الأولية
$\overline{A}$ متممة المجموعة A	$\overline{A}$ الحادثة المعاكسة للحادثة A
$A\cap B=\phi$	A وَ B حادثتان غير متلائمتين

◆ قانون الاحتمال– الاحتمال

تعريف $\Omega=\{e_1;e_2;...;e_n\}$ مجموعة الإمكانيات لتجربة عشوائية معيّنة ذات n مخرج.

قانون الاحتمال لتجربة عشوائية هو الدالة التي ترفق بكل حادثة أولية $\{e_i\}$ من $P(\Omega)$ عدد p_i من المجال $[0;1]$. حيث: $\sum_{i=1}^{n}p_i=1$.

p_i يدعى احتمال تحقق الحادثة الأولية $\{e_i\}$. ونرمز له بـــ: $p_i=p(\{e_i\})$.

الاحتمال المرفق بهذا القانون هو الدالة p المعرّفة على $P(\Omega)$ بما يلي:

$p(\phi)=0$.

وفي حالة $A\neq\phi$، $p(A)$ هو مجموع الأعداد p_i من أجل كل مخرج e_i من A.

أي: $p(A)=\sum_{e_i\in A}p_i$. يدعى احتمال تحقق الحادثة A.

تعليقات

الاحتمال p هو **دالة** مجموعة تعريفها $P(\Omega)$ وتأخذ قيمها في المجال $[0;1]$.

مجموعة الإمكانيات Ω مرفقة بالاحتمال p يرمز لها بـــ: $(\Omega;p)$ وتدعى **فضاء احتمالي** منته.

إذا كانت الحوادث الأولية لها نفس الاحتمال p_0 فإننا نقول أن الحوادث **متساوية الاحتمال**. ولدينا $p_0=\frac{1}{Card(\Omega)}$ / $Card(\Omega)$ يرمز إلى عدد عناصر Ω.

◆ خواص الاحتمال

$(\Omega;p)$ فضاء احتمالي منته.

- $p(\Omega)=1$.
- إذا كانتا A وَ B حادثتين من الفضاء فإن: $p(A\cup B)=p(A)+p(B)-p(A\cap B)$.
- إذا كانت A حادثة من الفضاء فإن: $p(A)=1-p(\overline{A})$.

◆ المتغيّر العشوائي – قانون الاحتمال

تعريف $(\Omega;p)$ فضاء احتمالي منته.

المتغيّر العشوائي X هو كل دالة معرّفة على مجموعة الامكانيات Ω وتأخذ قيمها في R.

$X(\Omega)=\{x_1;x_2;...;x_n\}$ تدعى مجموعة قيم المتغيّر العشوائي X.

قانون الاحتمال للمتغيّر العشوائي X، هو الدالة التي ترفق بكل قيمة x_i من $X(\Omega)$ عدد p_i من المجال $[0;1]$. حيث:

$$p_i=p(X=x_i)=\frac{Card(X=x_i)}{Card(\Omega)} \text{ و } \sum_{i=1}^{n}p_i=1.$$

◆ الأمل الرياضي – التباين – الانحراف المعياري

تعريف $(\Omega;p)$ فضاء احتمالي منته. X المتغيّر العشوائي المعرّف على Ω وَ $X(\Omega)=\{x_1;x_2;...;x_n\}$ مجموعة قيمه.

- الأمل الرياضي للمتغير العشوائي X هو $E(X)=\sum_{i=1}^{i=n}p_ix_i$ حيث $p_i=p(X=x_i)$

(يدعى كذلك المتوسط الحسابي ويرمز له $\overline{X}$)

- التباين للمتغير العشوائي X هو $V(X)=\sum_{i=1}^{i=n}p_i\left(x_i-\overline{X}\right)^2$ حيث $p_i=p(X=x_i)$

ويعطى كذلك بـــ: $V(X)=E(X^2)-[E(X)]^2$

- الانحراف المعياري للمتغير العشوائي X هو $\sigma(X)=\sqrt{V(X)}$

★ الاحتمال الشرطي

تعريف

$(\Omega; p)$ فضاء احتمالي منته. A وَ B حادثتان من Ω حيث: $p(A)\neq 0$.

"احتمال تحقق B علما أن A تحقق" هو الاحتمال p_A المعرّف بمـــا يلـــي: $p_A(B)=\frac{p(A\cap B)}{p(A)}$. p_A يدعى الاحتمال الشرطي علما A.

◆ الحوادث المستقلة

تعريف

$(\Omega; p)$ فضاء احتمالي منته. A وَ B حادثتان من Ω.

الحادثتان A وَ B مستقلتان عشوائيا **إذا وفقط إذا** كان

$$p(A\cap B)=p(A)\times p(B)$$

◆ دستور الاحتمالات الكليّة

مبرهنة1

$(\Omega; p)$ فضاء احتمالي منته، A_1 ، A_2 ،...، A_n حوادث من هذا الفضاء تشكّل تجزئة له.

من أجل كل حادثة B من الفضاء $(\Omega; p)$، لدينا:

$$p(B)=p(A_1)\times p_{A_1}(B)+p(A_2)\times p_{A_2}(B)+...+p(A_n)\times p_{A_n}(B)$$

أي: $$p(B)=\sum_{i=1}^{i=n} p(A_i)\times p_{A_i}(B) = \sum_{i=1}^{i=n} p(A_i\cap B)$$

◆ المتـــغيرات العشوائية المستقلّة

$(\Omega; p)$ فضاء احتمالي منته، X وَ Y المتغيّران العشوائيان المعرّفان على Ω.

$X(\Omega)=\{x_1;x_2;...;x_n\}$ وَ $Y(\Omega)=\{y_1;y_2;...;y_m\}$ مجموعتا قيمهما.

X وَ Y مستقلان **معنـــاه** من أجل كل $1\le i\le n$ وَ من أجل كل $1\le j\le m$، الحادثتان $(X=x_i)$ وَ $(Y=y_j)$ مستقلتان.

للحفظ

X وَ Y متغيران عشوائيان مستقلان

$E(XY)=E(X)\times E(Y)$ وَ $E(X+Y)=E(X)+E(Y)$

◆ التجارب العشوائية المستقلّة

$(\Omega_1;p_1)$، $(\Omega_2;p_2)$،...، $(\Omega_n;p_n)$. n فضاء احتمالي منته لـ n تجربة عشوائية معيّنة.

n تجربة عشوائية تكون مستقلة **إذا وفقط إذا كان** احتمال سلسلة الحوادث (A_1، A_2،...، A_n) حيث A_i حادثة من Ω_i هو: $p_1(A_1)\times p_2(A_2)\times...\times p_n(A_n)$.

★ قوانين الاحتمالات

◆ قانون برنولي $(Bernoulli)$ – قانون ثنائي الحدّ $(binomiale)$

تعريف

نعتبر تجربة عشوائية ذات مخرجين A وَ $\overline{A}$، [يُدعيان النجاح والإخفاق].

ونضع: احتمال تحقق A هو α واحتمال تحقق $\overline{A}$ هو $(1-\alpha)$ حيث: $\alpha\in]0;1[$.

قانون برنولي B_α هو قانون الاحتمال للمتغيّر العشوائي X والذي يرفق بالمخرج A القيمة 1 ويرفق بالمخرج $\overline{A}$ القيمة 0.

التجربة العشوائية ذات مخرجين تدعى تجربة برنولي

◆ خواص

- من أجل قانون برنولي B_α للمتغيّر العشوائي X المعرّف سابقا:
أمله الرياضي هو: $E(X)=\alpha$. وَ تباينه هو: $V(X)=\alpha(1-\alpha)$.
- من أجل $\alpha\in]0;1[$. نكرّر تجربة برنولي العشوائية n مرة

— نفرض أن التجارب العشوائية مستقلة—

ونعتبر المتغير العشوائي Y الذي يأخذ كقيم، عدد المرات التي يتحقق فيها المخرج α.

تعـــريـــفا: قانون الاحتمال للتغيّر العشوائي Y يدعى **قانون ثنائي الحدّ** وسيطاه n وَ α، ويرمز له: $B_{(n;\alpha)}$. معرّف بـــما يلي:

من أجل كل عدد طبيعي k حيث: $0 \le k \le n$ لدينا، $p(Y=k)=C_n^k\alpha^k(1-\alpha)^{n-k}$

و لدينا كذلك: $E(Y)=n\alpha$ وَ $V(Y)=n\alpha(1-\alpha)$

★ قوانين الاحتمال المستمرة

نعتبر فيما يلي $(I;p)$ فضاء احتمالي غير منته، حيث I مجال غير منته من R.

◆ قانون التوزيعات المنتظمة على المجال $[0;1]$

تعريف

قانون التوزيعات المنتظمة على المجال $[0;1]$ يهدف إلى الاختيار العشوائي لعدد من المجال $[0;1]$.

a وَ b عددان من المجال $[0;1]$ حيث: $a \le b$.

إذا كان J أحد المجالات الأربعة المحدّدة بالعددين a وَ b

(أي $J=[a;b]$ أو $J=[a;b[$ أو ...)

فـــإن الاحتمال P المعرّف بقانون التوزيعات المنتظمة على $[0;1]$ يحقق:

$P(J)=b-a$.

خواص

الاحتمال P المعرّف بقانون التوزيعات المنتظمة على $[0;1]$ يحقق كذلك:

- $P([0;1])=1$ وَ $P(\phi)=0$ وَمن أجل x من المجال $[0;1]$، $P(\{x\})=0$.
- إذا كان J_1 وَ J_2 مجالين منفصلين من $[0;1]$ فإن $P(J_1 \cap J_2)=P(J_1)+P(J_2)$.
- إذا كان $\overline{J}$ متممة المجال J إلى $[0;1]$ فإن $P(\overline{J})=1-P(J)$
- في قانون التوزيعات المنتظمة على $[0;1]$، احتمال تحقق أي مجال من $[0;1]$ هو طوله.

◆ القانون الأسي

تعريف

λ عدد حقيقي موجب تماما، وَ f_λ الدالة العددية المعرّفة على المجال $I=[0;+\infty[$ بالدستور: $f_\lambda(x)=\lambda e^{-\lambda x}$.

الاحتمال p على المجال I يعرّف القانون الأسي إذا وفقط إذا تحقق ما يلي:

- من اجل كل مجال J من I حداه a وَ b (حيث a وَ b عنصران من I وَ $a \le b$) لدينا: $p(J)=\int_a^b f_\lambda(x)dx$.
- من اجل كل مجال J حيث: $J=[a;+\infty[$ (a عنصر من I) لدينا: $p(J)=1-p([0;a])$.

تعليق

احتمال تحقق المجال $[a;b]$ يفسّر هندسيا، بمساحة الحيّز المستوي المحدد بالمنحني الممثّل للدالة f_λ وحامل محور الفواصل والمستقيمين اللذين معادلتهما $x=a$ وَ $x=b$.

★ قانون احتمال مستمر ذات كثافة

تعريف

- f دالة مستمرة وموجبة تماما على المجال $I=[a;b]$ من R، حيث: $\int_a^b f(t)dt=1$.

نعرّف الاحتمال p على المجال I كما يلي:

من اجل كل مجال J من I حداه c وَ d حيث $c \le d$، $p(J)=\int_c^d f(t)dt$

- f دالة مستمرة وموجبة تماما على المجال $I=[a;+\infty[$ من R، حيث:

$$\lim_{x\to+\infty}\int_a^x f(t)dt=1$$

نعرّف الاحتمال p على المجال I كما يلي:

من اجل كل مجال J من I حداه c وَ d حيث $c \le d$، $p(J)=\int_c^d f(t)dt$.

ومن أجل كل مجال K من I حيث: $K=[c;+\infty[$ أو $K=]c;+\infty[$

مع $c \ge a$، $p(K)=1-\int_a^c f(t)dt$

في الحالتين p يعرّف قانون الاحتمال على المجال I، والدالة f تدعى **الكثافة**.

للحفظ

قانون التوزيعات المنتظمة على $[0;1]$ ،هو قانون احتمال مستمر ذو كثافة وهي الدالة f المعرّفة على المجال $[0;1]$ بـــالدستور: $f(x)=1$.

القانون الأسي الذي وسيطه λ ، المعرّف على $\mathbb{R}_+$ هو قانون احتمال مستمر ذو كثافة وهي الدالة f المعرّفة على $\mathbb{R}_+$ بـــالدستور: $f(x)=\lambda e^{-\lambda x}$.

تمـــارين محـــلولة

الاحتمال الشرطي

1

نلقي زهرة نرد رباعية الوجوه، مرتين على التوالي تحمل أوجهها الأربعة الأرقام من 1 إلى 4 .

نهتم بمجموع الرقمين اللذين يظهران بعد الرميتين. احسب احتمال:

- المجموع يساوي 6 علما أن الرمية الأولى أعطت الرقم 3.
- المجموع يساوي على الأقل 7 علما أن الرمية الأولى أعطت الرقم 2.

الحل: $(\Omega;p)$ فضاء احتمالي منته، حيث $Card(\Omega)=4^2=16$ ، A و B حادثتين من Ω حيث: $p(A)\neq 0$

A حادثة " المجموع يساوي 6" لدينا: $A=\{(2;4);(4;2);(3;3)\}$

B حادثة " الرمية الأولى تعطي 3" لدينا: $B=\{(3;1);(3;2);(3;3);(3;4)\}\neq\phi$

وَ $A\cap B=\{(3;3)\}$

إذاً: الاحتمال أن يكون المجموع يساوي 6 علما أن الرمية الأولى أعطت الرقم 3

هو: $p_B(A)=\dfrac{p(A\cap B)}{p(B)}=\dfrac{\frac{1}{16}}{\frac{4}{16}}=\dfrac{1}{4}$

A' حادثة " المجموع أكبر من أو يساوي 7" لدينا: $A'=\{(3;4);(4;3);(4;4)\}$

B' حادثة " الرمية الأولى تعطي 2" لدينا: $B'=\{(2;1);(2;2);(2;3);(2;4)\}\neq\phi$

وَ $A'\cap B'=\phi$

إذاً: الاحتمال أن يكون المجموع يساوي على الأقل 7 علما أن الرمية الأولى أعطت الرقم 2

هو: $p_{B'}(A')=\dfrac{p(A'\cap B')}{p(B')}=0$

توضيف شجرة الاحتمالات واستعمال دستور الاحتمالات الكليّة

2

في دراسة إحصائية لتجمع سكاني معيّن، أفادت أن 10% من الأشخاص يحملون فيروسا ما.

إجراءات فحص استعجالية أُتخذت في هذا التجمع السكاني للتعرّف على هؤلاء الأشخاص. فلوحظ أنه من بين الأشخاص الحاملين لهذا الفيروس 95% كان فحصهم ايجابي(فعلا حاملون للفيروس) ومن بين الأشخاص غير الحاملين لهذا الفيروس 4% فحصهم كان ايجابي.

نختار عشوائيا شخصا من هذا التجمع ويجرى له الفحص.

A الحادثة " الشخص حامل للفيروس"

و B الحادثة " الفحص ايجابي".

- احسب احتمال الحوادث: $A\cap B$ ، $\overline{A}\cap B$ ، B .
- احسب الاحتمالين: $p_B(A)$ ، $p_B(\overline{A})$.

الحل: لحساب احتمال الحادثتين $A\cap B$ ، $\overline{A}\cap B$ نستعين بشجرة الاحتمالات التالية: (ترسم في نهاية الحل) لحساب احتمل الحادثة B نستعمل دستور الاحتمالات الكلية وذلك باعتبار أن A وَ $\overline{A}$ هما الحادثتين في مجموعة الإمكانيات.

$$p(B)=p(A)\times p_A(B)+p(\overline{A})\times p_{\overline{A}}(B)=p(A\cap B)+p(\overline{A}\cap B)=\frac{131}{1000}$$

$p_B(A)$ هو احتمال تحقق الحادثة A علما أن الحادثة B تحقّقت وحسب شجرة الاحتمالات

$$p_B(A)=\frac{p(A\cap B)}{p(B)}=\frac{95}{131}$$

$p_B(\overline{A})$ هو احتمال تحقق الحادثة $\overline{A}$ علما أن الحادثة B تحقّقت وحسب شجرة الاحتمالات

$$p_B(\overline{A})=\frac{p(\overline{A}\cap B)}{p(B)}=\frac{36}{131}$$

الشـــجرة (العنكبوتية)

$p(A)=\frac{1}{10}$ ، A:

- $p_A(B)=\frac{95}{100}$: $B \to p(A\cap B)=p(A)\times p_A(B)=\frac{95}{1000}$
- $p_A(\overline{B})=\frac{5}{100}$: $\overline{B}\to p(A\cap\overline{B})=p(A)\times p_A(\overline{B})=\frac{5}{1000}$

$p(\overline{A})=\frac{9}{10}$ ، $\overline{A}$:

- $p_{\overline{A}}(B)=\frac{4}{100}$: $B\to p(\overline{A}\cap B)=p(\overline{A})\times p_{\overline{A}}(B)=\frac{36}{1000}$
- $p_{\overline{A}}(\overline{B})=\frac{96}{100}$: $\overline{B}\to p(\overline{A}\cap\overline{B})=p(\overline{A})\times p_{\overline{A}}(\overline{B})=\frac{864}{1000}$

قانون برنولي

3	يحوي صندوق خمس كرات لا نميّز بينها عند اللمس (2 بيضاء وَ 3 سوداء) • نسحب من هذا الصندوق كرة واحدة، كيف يمكننا اختيار مجموعة الإمكانيات التي توافق قانون برنولي في هذه الحالة؟ • نجري أربع سحبات لكرة من الصندوق مع الإرجاع– السحبات الأربع مستقلّة– ما احتمال سحب بالضبط ثلاث كرات سوداء؟. • نعيد عملية سحب كرة من الصندوق 100 مرة مع الإرجاع، ما هو معدّل الكرات السوداء المسحوبة؟

الحل: نختار مجموعة الإمكانيات الموافقة لقانون برنولي مثلاً $\Omega=\{B;N\}$ حيث: B هو الأبيض وَ N هو الأسود

ولدينا: $p(\{B\})=\frac{2}{5}$ وَ $p(\{N\})=1-\frac{2}{5}=\frac{3}{5}$

نعرّف بالسحبة المكرّرة أربع مرات مع الإرجاع، قانون ثنائي الحدّ وسيطاه 4 وَ $\frac{3}{5}$.

إذاً احتمال سحب بالضبط ثلاث كرات هو:

$$p(X=3)=C_4^3\left(\frac{3}{5}\right)^3\times\left(\frac{2}{5}\right)^1=4\times\frac{54}{625}=0.3456$$

معدّل الكرات السوداء المسحوبة هو الأمل الرياضي للمتغيّر العشوائي لقانون ثنائي الحد وسيطاه 100 وَ $\frac{3}{5}$.وهو $E(X)=100\times\frac{3}{5}=60$.

كثافة الاحتمال

4	في كل حالة أذكر إن كانت الدالة هي كثافة احتمال. • الدالة f معرّفة على المجال $[0;1]$ بالدستور $f(x)=x^2$. • الدالة g معرّفة على المجال $[0;1]$ بالدستور $g(x)=4x^3$. • الدالة h معرّفة على المجال $[1;2]$ بالدستور $h(x)=4x^3$. • الدالة k معرّفة على المجال $[-1;0]$ بالدستور $k(x)=4x^3$. • الدالة l معرّفة على المجال $[2;+\infty[$ بالدستور $l(x)=\frac{2}{x^2}$.

الحل: لدينا $\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1 x^2dx=\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^1=\frac{1}{3}\neq 1$ إذاً الدالة f لا تمثّل كثافة احتمال.

لدينا $\int_0^1 g(x)dx=\int_0^1 4x^3dx=\left[x^4\right]_0^1=1$ وبما أن الدالة g مستمرة وموجبة على $[0;1]$ فإنها تمثّل كثافة احتمال على $[0;1]$.

لدينا $\int_1^2 h(x)dx=\int_1^2 4x^3dx=\left[x^4\right]_1^2=15\neq 1$ إذاً الدالة h لا تمثّل كثافة احتمال.

الدالة k لا تمثّل كثافة احتمال على المجال $[-1;0]$، كونها غير موجبة على $[-1;0]$.

لدينا $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_2^x f(t)dt = \lim\limits_{x\to+\infty}\int_2^x\left(\frac{2}{t^2}\right)dt = \lim\limits_{x\to+\infty}\left[-\frac{2}{t}\right]_2^x = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\frac{2}{x}\right) = 1$

وبما أن الدالة f مستمرة وموجبة على $[2;+\infty[$ فإنها تمثّل كثافة احتمال على $[2;+\infty[$.

قانون الاحتمال للمتغيّر العشوائي المستمر

5	X المتغيّر العشوائي المستمر، والدالة f كثافة الاحتمال المعرّفة على المجال $[0;+\infty[$ بالدستور: $f(x)=e^{-x}$ علّل كون f كثافة احتمال واحسب احتمل الحادثة $1\le X\le 2$.

الحل: الدالة $f: x\to e^{-x}$ معرّفة وقابلة للاشتقاق على كامل f وبالخصوص على $[0;+\infty[$.

فهي إذاً **مستمرة** على $[0;+\infty[$. ومن أجل كل x من R، $e^{-x}>0$

أي الدالة f **موجبة** على $[0;+\infty[$.

ولدينا: $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_0^x f(t)dt = \lim\limits_{x\to+\infty}\int_0^x e^{-t}dt = \lim\limits_{x\to+\infty}\left[-e^{-t}\right]_0^x = 1$

مما سبق فإن الدالة f كثافة احتمال على المجال $[0;+\infty[$.

$$p([1;2]) = p(1\le X\le 2) = \int_1^2 e^{-x}dx = \left[-e^{-x}\right]_1^2 = e^{-1}-e^{-2}\approx 0.23$$

القانون الأسي

6	جهاز كهربائي يشتغل ببطاريتين P_1 و P_2. X_1 المتغير العشوائي الذي يرفق بكل بطارية من النوع P_1 المدة الزمنية لصلاحيتها بالساعة، و X_2 المتغير العشوائي الذي يرفق بكل بطارية من النوع P_2 المدة الزمنية لصلاحياتها بالساعة. نفرض أن المتغيران العشوائيان X_1 و X_2 مستقلان ويتبعان نفس القانون الأسي الذي كثافته الدالة f المعرّفة على المجال $[0;+\infty[$ بالدستور: $f(x)=0.001e^{-0.001x}$ نفرض أن الجهاز يتوقف عن التشغيل بمجرد نفاد إحدى البطاريتين. • احسب احتمال توقف الجهاز عن التشغيل في حدود 500 ساعة. • احسب احتمال كون الجهاز في حدود 1000 ساعة لا يزال يشتغل.

الحل: احتمال توقف الجهاز عن التشغيل في حدود 500 ساعة، **يعـــني**

احتمال أن تكون المدة الزمنية لصلاحية إحدى البطاريتين على الأقل P_1 أو P_2 أصغر من أو تساوي 500 ساعة. هو:

$$p((X_1\le 500)\cup(X_2\le 500)) = p(X_1\le 500)+p(X_2<500)-p((X_1\le 500)\cap(X_2\le 500))$$
$$= p(X_1\le 500)+p(X_2\le 500)-p(X_1\le 500)\times p(X_2\le 500)$$
$$= 2\int_0^{500}0.001e^{-0.001x}dx-\left(\int_0^{500}0.001e^{-0.001x}dx\right)^2\approx 0.63$$

احتمال كون الجهاز في حدود 1000 ساعة لا يزال يشتغل، **يعـــني**

احتمال أن تكون المدة الزمنية لصلاحية كلا البطاريتين P_1 و P_2 أكبر من أو تساوي 1000 ساعة. هو:

$$p((X_1\ge 1000)\cap(X_2\ge 1000)) = p(X_1\ge 1000)\times p(X_2\ge 1000)$$
$$= \left(\lim_{x\to+\infty}\int_{1000}^x 0.001e^{-0.001t}dt\right)^2 = e^{-2}$$

تمارين للتدريب

1. بسّط العبارات التالية: $\frac{12!}{15!}$ ، $\frac{6!5!}{3!4!}$ ، $6!\left(\frac{9}{8!}-\frac{1}{7!}\right)$ ، $\frac{n!}{(n+1)!}$ ،
$\frac{n(n+1)!}{(2n)!}$ ، $\frac{(2n+1)!}{(2n-1)!}$

باستعمال الرمز ! أعط كتابة أخرى لكل من الأعداد التالية:

$4\times5\times6\times7\times8\times9$ ، $\frac{9\times8\times7\times6\times5}{3\times2}$ ، $n(n+1)(n+2)$.

أنشر ثنائيات الحد التالية: $(a+1)^5$ ، $(2a-3b)^4$ ، $(2x-1)^6$.

باستعمال نشر ثنائي الحد $(a-1)^n$ برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي زوجي لدينا: $C_n^0+C_n^2+C_n^4+...+C_n^n=C_n^1+C_n^3+C_n^5+...+C_n^{n-1}$

دون النشر، أعط معامل x^4 في نشر ثنائي الحد $(2x-1)^6$.

أنشئ الأسطر الخمسة الأولى لمثلث باسكال، ثم احسب الأعداد 11^2، 11^3، 11^4 باستعمال مثلث باسكال.
باستعمال دستور ثنائي الحد، أشرح الظاهرة الملاحظة، ثم فسّر كيف أن هذه الظاهرة لا تصلح من اجل العدد 11^5.

2. وعاء U_1 يحوي كرتين حمراوين وكرة خضراء. وعاء U_2 يحوي كرة حمراء وكرتين خضراوين.

المرحلة الأولى: نلقي زهرة النرد المكعّبة متقنة الصنع.

المرحلة الثانية: إذا ظهر الوجه 6 فإننا نسحب كرة من الوعاء U_1، وإذا لم يظهر 6 فإننا نسحب الكرة من الوعاء U_2.

احسب احتمال تحقق كلا من الحادثتين: A : نحصل في الزهرة على 6 ونسحب كرة حمراء.
B : الحصول على كرة حمراء في نهاية المرحلة الثانية.

3. يحوي وعاء 4 كرات مرقمة من 1 إلى 4.
نسحب على التوالي ثلاث كرات مع الإرجاع، ونعتبر المتغيّر العشوائي X الذي يرفق بكل سحبة أصغر رقم يظهر في الكرات الثلاث.
عيّن قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X ؟.

4. يحوي وعاء عشر كرات مرقمة من 1 إلى 10. نسحب من هذا الوعاء بالصدفة وفي آن واحد أربع كرات ونهتم بالأرقام التي تحملها.
ما هو عدد مخارج هذا النشاط؟.
احسب احتمال تحقق كلا من الحوادث التالية:

A نحصل على رقم واحد مضاعف ثلاثة. C نحصل بالضبط على رقمين مضاعفين لثلاثة.
B لا نحصل على أي عدد مضاعف ثلاثة. D نحصل على الأقل على رقم مضاعف ثلاثة.

5. ينقسم مصنع إلى ثلاث وحدات α ، β ، γ لإنتاج المصابيح الكهربائية.
وحدة الإنتاج α تغطي 20% من إنتاج المصنع منها 5% غير صالحة للاستعمال.
وحدة الإنتاج β تغطي 30% من إنتاج المصنع منها 4% غير صالحة للاستعمال.
وحدة الإنتاج γ تغطي 50% من إنتاج المصنع منها 1% غير صالحة للاستعمال.
نختار بالصدفة مصباح، احسب احتمال كلا من الحوادث التالية.

A : المصباح غير صالح وتنتجه الوحدة α.
B : المصباح غير صالح وتنتجه الوحدة γ.
C :المصباح غير صالح وتنتجه الوحدة β.

6. يلعب نسيم لعبة معيّنة ذات عدّة جولات بحيث حظوظ الربح في الجولة الأولى تعادل حظوظ الإخفاق فيها.
نفرض انه، عندما يربح نسيم جولة فإن احتمال ربح الجولة التي تليها هو 0.6 . عندما يخفق نسيم في جولة فإن احتمال الإخفاق في الجولة التي تليها هو 0.7 .
من اجل العدد الطبيعي n، نضع: A_n حادثة "يربح نسيم الجولة من الرتبة n".
B_n حادثة " يخفق نسيم في الجولة من الرتبة n".

- احسب احتمال الحوادث A_1، B_1 وَ A_2 واستنتج احتمال الحادثة B_2.
- نضع: من أجل كل n من N^*: $X_n = P(A_n)$ وَ $Y_n = P(B_n)$
بيّن أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n، $X_{n+1} = 0.6X_n + 0.3Y_n$
وَ $Y_{n+1} = 0.4X_n + 0.7Y_n$
- نضع: من أجل كل n من N^*: $V_n = X_n + Y_n$ وَ $W_n = 4X_n - 3Y_n$.
بيّن أن المتتالية (V_n) ثابتة.
- بيّن أن المتتالية (W_n) هندسية، ثم عبّر عن W_n وَ X_n بدلالة n.
أدرس تقارب المتتالية العددية (X_n).

7. حارس مرمى في كرة القدم يحقق احتمال لصد الضربات الترجيحية يقدّر بـ: 0.3 .
يتعرّض هذا الحارس لخمس ضربات ترجيحية – (نفرض أن هذه الضربات مستقلّة).
ما احتمال أن يتصدى هذا الحارس لرمية على الأقل؟. ما احتمال أن يتصدى هذا الحارس للرميات الخمس؟.

8. p احتمال مرافق للقانون الأسي الذي كثافته الدالة f المعرّفة على $[0;+\infty[$ بالدستور: $f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$

عيّن العدد الحقيقي الموجب تماما λ بحيث يكون: $p([0:2]) = \frac{e^4 - 1}{e^4}$

9. قرّر محمد زيارة مغازة لشراء بعض الحاجيات. دخل محمد المغازة عشوائيا بين الساعة $11:00$ و الساعة $12:00$ على أن لا تزيد جولته عن 10 دقائق.

ما احتمال أن يتمكّن محمد من الاستفادة من التخفيضات التي ستعرضها إدارة المغازة في المدة الزمنية من $11:45$ إلى $12:15$؟

10. قانون التوزيعات المنتظمة على المجال $[a;b]$ حيث: $a<b$ يهتم بسحب عدد حقيقي بطريقة عشوائية من المجال $[a;b]$.

يتميّز هذا القانون بالخاصة التالية: احتمال كل مجال من $[a;b]$ متناسب مع طوله.

نفرض أن قانون التوزيعات المنتظمة على المجال $[a;b]$ هو قانون احتمال مستمر ذات كثافة. أي أنه توجد دالة f معرّفة ومستمرة على المجال $[a;b]$ بحيث: من أجل كل مجال $[c;d]$ محتوى في $[a;b]$ لدينا: $p([c;d])=\int_c^d f(t)dt$

نهدف في هذا التمرين إلى تعيين الدالة f.

- لتكن F دالة أصلية للدالة f.

  بيّن أنه يوجد عدد حقيقي k بحيث، من اجل كل مجال $[c;d]$ محتوى في $[a;b]$ لدينا: $F(d)-F(c)=k(d-c)$

- نعتبر العدد x_0 من المجال $[a;b]$، بيّن أن الدالة F تقبل الاشتقاق عند x_0، واحسب $F'(x_0)$.
- استنتج أن الدالة f ثابتة على المجال $[a;b]$.
- باستعمال المساواة $p([a;b])=1$ أعط عبارة $f(t)$ من أجل كل t من $[a;b]$.
- ارسم التمثيل البياني للدالة f على المجال $[a;b]$، وفسّر هندسيا النتائج المحصّل عليها سابقا (خذ $a=-1$ وَ $b=4$)

تطبيـــق: نختار عشوائيا عددا من المجال $[-1;4]$ ما احتمال أن يكون هذا العدد في المجال $[0;1]$؟

ما احتمال أن يكون هذا العدد أصغر من -0.39 علما أنه سالب؟

7- الأعداد المركبة

ما يجب أن يعرف:

★ الأعداد المركّبة – التمثيل الهندسي

◆ العدد المركّب

تعريف: العدد المركّب هو عدد من الشكل $x+iy$ حيث: x و y عددان حقيقيان وَ i عدد تخيلي يحقّق $i^2=-1$.

نرمز لمجموعة الأعداد المركبة بالرمز C.

للحفظ: الكتابة $z=x+iy$ للعدد المركّب حيث: x وَ y عددان حقيقيان تدعى **الشكل الجبري** للعدد المركّب z

x يدعى الجزء الحقيقي للعدد المركّب z ويرمز له $\mathrm{Re}(z)$.

y يدعى الجزء التخيلي للعدد المركّب z ويرمز له $\mathrm{Im}(z)$.

من أجل كل عدد مركّب z، z عدد حقيقي **إذا وفقط إذا** كان $\mathrm{Im}(z)=0$.

z عدد تخيّلي **إذا وفقط إذا** كان $\mathrm{Re}(z)=0$.

$z=x+iy$ وَ $z'=x'+iy'$ عددان مركّبان كتبا بشكلهما الجبري

$z=z'$ يكافئ $x=x'$ وَ $y=y'$ ، $z=0$ يكافئ $x=0$ وَ $y=0$

$z+z'=(x+x')+i(y+y')$ مجموع عددين مركّبين

$z\times z'=(xx'-yy')+i(xy'+yx')$ جدا عددين مركبين

◆ **التمثيل الهندسي**

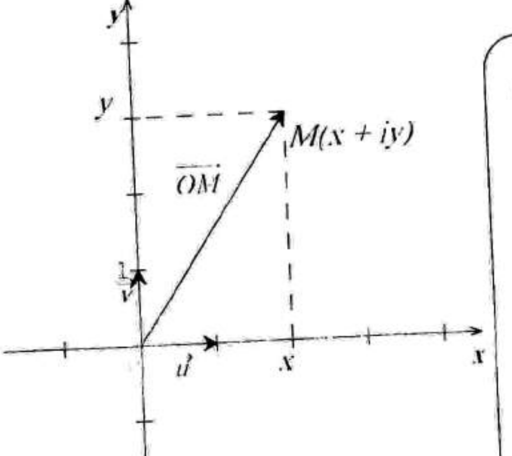
$(O;\vec{i};\vec{j})$ معلم للمستوي متعامد ومتجانس مباشر.

• لكل عدد مركب $z = x + iy$ (حيث: x و y عددان حقيقيان) نرفق النقطة M من المستوي إحداثياتها $(x;y)$ في المعلم $(O;\vec{i};\vec{j})$، أو نرفق الشعاع $\overrightarrow{OM}$ إحداثياته $(x;y)$ في نفس المعلم.

M تدعى النقطة الصورة للعدد المركّب z.

$\overrightarrow{OM}$ يدعى الشعاع الصورة للعدد المركّب z.

• لكل نقطة M من المستوي إحداثياتها $(x;y)$ في المعلم $(O;\vec{i};\vec{j})$، نرفق عدد مركب $x + iy$ ويدعى لاحقة النقطة M، أو لاحقة الشعاع $\overrightarrow{OM}$.



للحفظ

$(O;\vec{i};\vec{j})$ معلم متعامد ومتجانس مباشر للمستوي.
A و B نقطتان من المستوي لاحقتاهما على الترتيب z_A و z_B.
لاحقة الشعاع $\overrightarrow{AB}$ هي العدد المركّب $z_B - z_A$.

لاحقة منتصف القطعة المستقيمة $[AB]$ هو العدد المركّب $\frac{z_A + z_B}{2}$.

• $\vec{u}$ و $\vec{v}$ شعاعان من المستوي لاحقتاهما على الترتيب z و z'.
الشعاعان $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مرتبطان خطياً **إذا وفقط إذا** كان $z = kz'$ حيث $k \in \mathbb{R}$.
العدد المركّب z حقيقي **إذا وفقط إذا** كانت صورته M تقع على محور الفواصل.
العدد المركّب z تخيلي **إذا وفقط إذا** كانت صورته M تقع على محور التراتيب.

◆ **مرافق عدد مركّب**

تعريف

z عدد مركّب يكتب بالشكل الجبري $x + iy$ حيث x و y عددان حقيقيان.
مرافق العدد المركّب z هو العدد المركّب الذي نرمز له $\bar{z}$ ويكتب بالشكل $\bar{z} = x - iy$.

للحفظ

• في المستوي المركّب، صورتا العددين المركّبين المترافقين متناظرتان بالنسبة لمحور الفواصل.

• z و z' عددان مركّبان.

• $\bar{\bar{z}} = z$ ، $\overline{z+z'} = \bar{z} + \bar{z'}$ ، $\overline{zz'} = \bar{z}\,\bar{z'}$ ، $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\bar{z}}$

$z \neq 0 \;/\; \overline{\left(\frac{z'}{z}\right)} = \frac{\bar{z'}}{\bar{z}}$

• $z + \bar{z} = 2\,\mathrm{Re}(z)$ ، $z - \bar{z} = 2i\,\mathrm{Im}(z)$

• z عدد حقيقي إذا وفقط إذا كان $z = \bar{z}$.

• z عدد تخيلي صرف إذا وفقط إذا كان $\bar{z} = -z$.

◆ **طويلة و عمدة عدد مركّب غير معدوم**

تعريف

z عدد مركّب غير معدوم يكتب بالشكل الجبري $x + iy$ حيث x و y عددان حقيقيان.
M صورة للعدد المركّب z في المستوي المركّب المزوّد بالمعلم المتعامد والمتجانس المباشر $(O;\vec{i};\vec{j})$. $(r;\theta)$ الإحداثيات القطبية للنقطة M.
r يدعى طويلة العدد المركّب z ويرمز له $|z|$.
θ يدعى عمدة العدد المركّب z ويرمز له $\arg(z)$.

خواص طويلة عدد مركّب

للحفظ

المستوي المركّب مزوّد بالمعلم المتعامد والمتجانس المباشر $(O;\vec{i};\vec{j})$.

إذا كانت النقطة M صورة للعدد المركّب z فإن $\|\overrightarrow{OM}\| = OM = |z|$.

إذا كانت النقطتان A وَ B صورتين للعددين المركّبين z_A و z_B فإن $AB = |z_B - z_A| = \|\overrightarrow{AB}\|$.

- من أجل كل عددين مركّبين z وَ z' لدينا:

$|z| = |\bar{z}| = |-z| = |-\bar{z}|$ ، $|zz'| = |z|\times|z'|$ ، $|z+z'| \le |z|+|z'|$

$|z|^2 = z\bar{z}$ ، $n\in N$ / $|z^n| = |z|^n$

$\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}$ ، $\left|\frac{z'}{z}\right| = \frac{|z'|}{|z|}$ حيث $z\neq 0$

- $|z|=0$ يكافئ $z=0$
- $|z|=1$ يكافئ $\bar{z} = \frac{1}{z}$

خواص عمدة عدد مركّب غير معدوم

للحفظ

المستوي المركّب مزوّد بالمعلم المتعامد والمتجانس المباشر $(O;\vec{i};\vec{j})$.

إذا كانت النقطة M صورة للعدد المركّب غير المعدوم z فإن $\arg(z) = (\vec{i};\overrightarrow{OM})$.

إذا كانت النقط A ، B ، C المتمايزة صور الأعداد المركّبة z_A ، z_B ، z_C فإن:

$(\vec{i};\overrightarrow{AB}) = \arg(z_B - z_A)$ وَ $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}) = \arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right)$

للحفظ

$z\in R^*$ يكافئ $\arg(z)=k\pi$	$z\in iR^*$ يكافئ $\arg(z)=\frac{\pi}{2}+k\pi$
$\arg(z) = -\arg(\bar{z}) + 2k\pi$	$k\in Z$ / $\arg(z)=\pi+\arg(-z)+2k\pi$

للحفظ

$\arg\left(\frac{1}{z}\right)\equiv -\arg z[2\pi]$ ، $\arg(zz') \equiv \arg(z)+\arg(z')[2\pi]$

$n\in N$ / $\arg z^n \equiv n\arg z[2\pi]$ ، $\arg\left(\frac{z'}{z}\right)\equiv \arg z' - \arg z[2\pi]$

◆ الشكل المثلثي لعدد مركب غير معدوم

تعريف

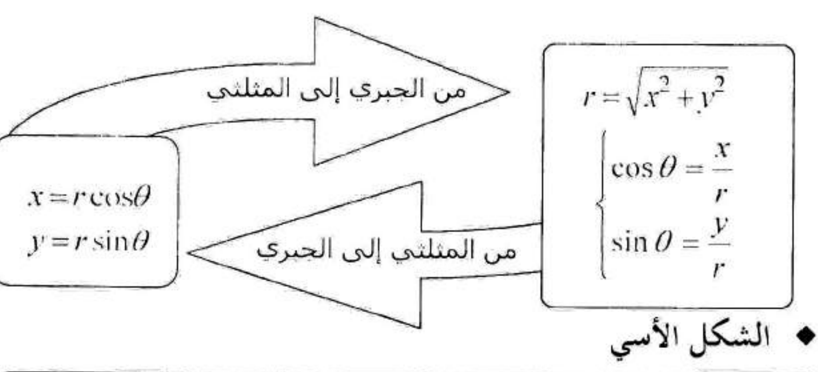
z عدد مركّب غير معدوم، r عدد حقيقي موجب تماما وَ θ عدد حقيقي كيفي.

r طويلة العدد z وَ θ عمدة له **إذا وفقط إذا كان** z يكتب بالشكل

$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

هذه الكتابة للعدد z تدعى **الشكل المثلثي** للعدد المركّب z.

الانتقال من الشكل المثلثي إلى الشكل الجبري والعكس



◆ الشكل الأسي

تعريف

z عدد مركّب غير معدوم، r عدد حقيقي موجب تماما وَ θ عدد حقيقي كيفي.

للعدد المركّب z كتابة من الشكل $z = re^{i\theta}$ تدعى الشكل الأسي للعدد z.

خـــواص

- $r(\cos\theta + i\sin\theta) = r'(\cos\theta' + i\sin\theta')$ **يكافئ** $r = r'$ وَ $\theta = \theta' + 2k\pi$ حيث $k \in Z$.
- $re^{i\theta} = r'e^{i\theta'}$ **يكافئ** $r = r'$ وَ $\theta = \theta' + 2k\pi$ حيث $k \in Z$.
- من أجل كل n من Z، $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = (\cos n\theta + i\sin n\theta)$
  وَ $\left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta}$ / (دستور موافر)
- $\cos\theta = \dfrac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$ وَ $\sin\theta = \dfrac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$ (دستور أولر)

✶ المعادلات من الدرجة الثانية

◆ الجذران التربيعيان لعدد مركب

عدد مركب غير معدوم وَ θ عمدة له. المعادلة $z^2 = a$ تقبل في المجموعة C
ين متعاكسين هما: $\sqrt{|a|}\left(\cos\frac{\theta}{2} + i\sin\frac{\theta}{2}\right)$ وَ $-\sqrt{|a|}\left(\cos\frac{\theta}{2} + i\sin\frac{\theta}{2}\right)$
ويدعيان الجذران التربيعيان للعدد a.

مبرهنة1

المعادلة $az^2 + bz + c = 0$ حيث a، b، c أعداد مركّبة وَ $(a \neq 0)$

تقبل حلين في المجموعة C هما: $\dfrac{-b-\delta}{2a}$ وَ $\dfrac{-b+\delta}{2a}$

حيث: δ جذر تربيعي للعدد $\Delta = b^2 - 4ac$.

نتيجة

نعتبر المعادلة $az^2 + bz + c = 0$ حيث a، b، c أعداد مركّبة و $(a \neq 0)$

إذا كان z_1 و z_2 حلّي هذه المعادلة فإنه من أجل كل عدد مركب z،

$$az^2 + bz + c = a(z - z_1)(z - z_2)$$

ولدينا: $z_1 + z_2 = -\dfrac{b}{a}$ وَ $z_1 \times z_2 = \dfrac{c}{a}$

◆ الجذور النونية لعدد مركّب

مبرهنة2

a عدد مركّب غير معدوم، طويلته r والعدد الحقيقي θ عمدة له.

العدد a له n جذر نوني وهي حلول المعادلة $z^n = a$ ذات المجهول المركّب z. هذه الحلول كلها من الشكل:

$$z_k = \sqrt[n]{r}\, e^{i\frac{(\theta+2k\pi)}{n}} \;/\; k \in \{0;1;2;\dots;(n-1)\}$$

للحفظ

في المستوي المركّب المزوّد بالمعلم المتعامد والمتجانس المباشر $(O;\vec{i};\vec{j})$. $a \in C^*$ وَ n عدد طبيعي.

صور حلول المعادلة $z^n = a$ ذات المجهول المركّب z حيث $(n \geq 3)$، هي رؤوس مضلع منتظم عدد أضلاعه n مرسوم داخل الدائرة التي مركزها O ونصف قطرها $\sqrt[n]{|a|}$.

✶ الأعداد المركّبة والتحويلات النقطية في المستوي

المستوي المركّب مزوّد بالمعلم المتعامد والمتجانس المباشر $(O;\vec{i};\vec{j})$.

النقطتان M وَ M' صورتي العددين المركّبين z وَ z' على الترتيب.

f الدالة ذات المتغيّر المركب z المرفقة بالتحويل النقطي T حيث:

$f(z) = z'$ يكافئ $T(M) = M'$

الجدول التالي يلخّص التعريف الهندسي والتعريف المركّب للتحويل النقطي.

التحويل النقطي	التعريف الهندسي	التعريف المركّب
الانسحاب شعاعه $\vec{v}$ الذي لاحقته $z_{\vec{v}}$	$\overrightarrow{MM'}=\vec{v}$	$z'=z+z_{\vec{v}}$
التحاكي مركزه Ω الذي لاحقته z_Ω ونسبته k. حيث $k\in\mathbb{R}^*$	$\overrightarrow{\Omega M'}=k\,\overrightarrow{\Omega M}$	$z'-z_\Omega=k(z-z_\Omega)$
دوران مركزه Ω الذي لاحقته z_Ω وزاويته θ	$\Omega M'=\Omega M$ و $(\overrightarrow{\Omega M};\overrightarrow{\Omega M'})=\theta+2k\pi$ حيث $k\in Z$	$z'-z_\Omega=e^{i\theta}(z-z_\Omega)$

تمارين محلولة

الكتابة عل الشكل الجبري

1 اكتب كلا من الأعداد التالية على الشكل الجبري، ثم عيّن الجزء الحقيقي والجزء التخيلي.

$z_1=(1+i)^3$ ، $z_2=(2i-3)(2+3i)$ ، $z_3=i^5$ ، $z_4=\frac{1-i}{i+2}$ ، $z_5=\frac{5}{i}$.

الحل: $z_1=(1+i)^3=1+3i+3i^2+i^3=-2+2i$ ← $\mathrm{Re}(z_1)=-2$ و $\mathrm{Im}(z_1)=2$.

$z_2=(2i-3)(2+3i)=4i-6-6-9i=-12-5$ ← $\mathrm{Re}(z_2)=-12$ و $\mathrm{Im}(z_2)=-5$.

$z_3=i^5=i\times i^2\times i^2=i(-1)(-1)=$ ← $\mathrm{Re}(z_3)=0$ و $\mathrm{Im}(z_3)=1$.

$z_4=\frac{1-i}{i+2}=\frac{(1-i)(-i+2)}{(i+2)(-i+2)}=\frac{-i+2+i^2-2i}{1+4}=\frac{1-3}{5}$ ← $\mathrm{Re}(z_4)=\frac{1}{5}$ و $\mathrm{Im}(z_4)=-\frac{3}{5}$.

$z_5=\frac{5}{i}=\frac{5(-i)}{-i^2}=-5i$ ← $\mathrm{Re}(z_5)=0$ و $\mathrm{Im}(z_5)=-5$.

الأشكال المختلفة لعدد مركّب

2 ضع على الشكل المثلثي ثم الأسي كلا من الأعداد:

$z_1=-3+i\sqrt{3}$ ، $z_2=\frac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2}$ ، $z_3=-1+i$.

ضع على الشكل الجبري كلا من العددين:

$z_4=2e^{-i\frac{\pi}{3}}$ ، $z_5=-3(\cos\frac{2\pi}{3}-i\sin\frac{2\pi}{3})$.

الحل: $z_1=-3+i\sqrt{3}$. لدينا $|z_1|=\sqrt{(-3)^2+\sqrt{3}^2}=2\sqrt{3}$ نسمي θ_1 عمدة العدد z_1 تحقق

$$\begin{cases}\cos\theta_1=\frac{-3}{2\sqrt{3}}=\frac{-\sqrt{3}}{2}\\ \sin\theta_1=\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}=\frac{1}{2}\end{cases}$$

إذاً: $\theta_1=\frac{5\pi}{6}+2k\pi \,/\, k\in Z$

وبالتالي: $z_1=2\sqrt{3}\left(\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}\right)$ و $z_1=2\sqrt{3}e^{i\frac{5\pi}{6}}$.

$z_2=\frac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2}$. لدينا $|z_2|=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2+\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}=\sqrt{2}$ نسمي θ_2 عمدة العدد z_2 تحقق

$$\begin{cases}\cos\theta_2=\frac{\sqrt{6}}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \sin\theta_2=\frac{-\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}=-\frac{1}{2}\end{cases}$$

إذاً: $\theta_2=\frac{-\pi}{6}+2k\pi \,/\, k\in Z$

وبالتالي: $z_2=\sqrt{2}\left(\cos\frac{-\pi}{6}+i\sin\frac{-\pi}{6}\right)$ و $z_2=\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{6}}$.

$z_3=-1+i$. لدينا $|z_3|=\sqrt{(-1)^2+(1)^2}=\sqrt{2}$ نسمي θ_3 عمدة العدد z_3

تحقّق $\begin{cases}\cos\theta_3=\frac{1}{\sqrt2}=\frac{\sqrt2}{2}\\ \sin\theta_3=\frac{-1}{\sqrt2}=-\frac{\sqrt2}{2}\end{cases}$ إذاً: $k\in Z\,/\,\theta_3=\frac{-\pi}{4}+2k\pi$

وبالتالي: $z_3=\sqrt2\left(\cos\frac{-\pi}{4}+i\sin\frac{-\pi}{4}\right)$ وَ $z_3=\sqrt2e^{-i\frac{\pi}{4}}$.

$z_4=2e^{-i\frac{\pi}{3}}$. يعني أن $|z_4|=2$ وَ $\arg z_4=-\frac{\pi}{3}$

إذاً: $z_4=2\left(\cos\frac{-\pi}{3}+i\sin\frac{-\pi}{3}\right)$ أي $z_4=1-i\sqrt3$.

$z_5=-3(\cos\frac{2\pi}{3}-i\sin\frac{2\pi}{3})$. يعني أن $|z_5|=3$ و $\arg z_5=\pi-\frac{2\pi}{3}=\frac{\pi}{3}$

إذاً: $z_5=3\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$ أي $z_5=\frac32+i\frac{3\sqrt3}{2}$.

حل معادلات في C

3

• حل في مجموعة الأعداد المركّبة C المعادلات التالية:

$3z^2+z-1=0$ ، $3z^2+z+1=0$ ، $z^2+(-2+9i)z-18-6i=0$.

• نعتبر العبارة $f(z)=z^3+9iz^2+2(6i-11)z-3(4i+12)$ ذات المتغيّر z من C.

بيّن أن المعادلة $f(z)=0$ تقبل حلا حقيقيا في C.

حل في C المعادلة $f(z)=0$.

الحل: • $3z^2+z-1=0$. مّيزها هو $\Delta=13$ حليّها هما: $z'=\frac{-1-\sqrt{13}}{6}$ وَ $z''=\frac{-1+\sqrt{13}}{6}$ إذاً: $S=\{z';z''\}$.

• $3z^2+z+1=0$. مّيزها هو $\Delta=-11=\left(i\sqrt{11}\right)^2$ حليّها هما: $z'=\frac{-1-i\sqrt{11}}{6}$ وَ $z''=\frac{-1+i\sqrt{11}}{6}$ إذاً: $S=\{z';z''\}$.

• $z^2+(-2+9i)z-18-6i=0$. مّيزها هو $\Delta=(-2+9i)^2-4(-18-6i)=-5-12i$

نبحث عن الجذرين التربيعيين للعدد Δ.

نضع: $z=x+iy$ أحد الجذرين التربيعيين للعدد Δ حيث: x وَ y عددان حقيقيان.

$z^2=\Delta$ يكافئ $(x+iy)^2=\Delta$ يكافئ $x^2-y^2+2ixy=-5-12i$

يكافئ $\begin{cases}x^2-y^2=-5\\ 2xy=-12\end{cases}$ يكافئ $z=2-3i$ أو $z=-2+3i$

إذاً: حلّي المعادلة هما:

$z'=\frac{(2-9i)-(2-3i)}{2}=-3i$

وَ $z''=\frac{(2-9i)+(2-3i)}{2}=2-6i$

وبالتالي $S=\{z';z''\}$.

لاحظ

يمكن إضافة معادلة ثالثة مساعدة لحل الجملة وهي: $x^2+y^2=13$ تنتج من تساوي الطويلتين للعددين z^2 وَ Δ وهي في اتجاه واحد.

$z_1=z_2$ يستلزم $|z_1|=|z_2|$

• نبحث عن العدد الحقيقي z_0 الذي يحقق $f(z_0)=0$.

$f(z_0)=0$ يكافئ $z_0^3+9iz_0^2+2(6i-11)z_0-3(4i+12)=0$ يكافئ

$\left(z_0^3-22z_0-36\right)+\left(9z_0^2+12z_0-12\right)i=0$

يكافئ $\begin{cases}z_0^3-22z_0-36=0\\ 9z_0^2+12z_0-12=0\end{cases}$ أي $z_0=-2$ وهو حل حقيقي للمعادلة $f(z)=0$.

لإيجاد الحلول الأخرى للمعادلة $f(z)=0$، نحلّل العدد $f(z)$ إلى جدا عاملين أحدهما من الدرجة الأولى نعرفه والآخر من الدرجة الثانية نبحث عنه، باستعمال جدول هورنر (مثلاً)

معاملات $f(z)$	1	$9i$	$12i-22$	$-12i-36$
الحل الحقيقي -2	//////	-2	$-18i+4$	$12i+36$
معاملات هورنر	1	$9i-2$	$-6i-18$	0

يعني أن: $f(z)=(z+2)\left(z^2+(9i-2)z-6i-18\right)$ من أجل كل z من C.

$f(z)=0$ يكافئ $z+2=0$ أو $z^2+(9i-2)z-6i-18=0$ حلّت سابقاً

يكافئ $z=-2$ أو $z=2-6i$ أو $z=-3i$

وبالتالي: $S=\{-2;-3i;2-6i\}$.

التعرّف على مجموعة النقط

4	في المستوي المركّب المزوّد بالمعلم المتعامد والمتجانس المباشر $(O;\vec{i};\vec{j})$. نعتبر النقطة M إحداثياتها $(x;y)$ صورة العدد المركّب z. عيّن وأنشئ (P_1) و (P_2) مجموعتي النقط M من المستوي حيث: $(P_1): \|z+4\|=2$ ، $(P_2): \|z-1-i\|=\|z+3-2i\|$.

الحل: $(P_1): |z+4|=2$ تكافئ $(P_1): AM=2$ حيث A صورة العدد -4.

إذاً: (P_1) الدائرة التي مركزها A ونصف قطرها 2.

$(P_2): |z-1-i|=|z+3-2i|$ تكافئ $(P_2): BM=CM$ حيث B صورة العدد $(1+i)$ و C صورة العدد $(2i-3)$.

إذاً: (P_2) هي محور القطعة المستقيمة $[BC]$.

التحويلات النقطية والأعداد المركّبة

5	A صورة العدد المركّب $-1+\sqrt{3}+i$ في المستوي المركّب المزوّد بالمعلم المتعامد والمتجانس المباشر $(O;\vec{i};\vec{j})$. s التناظر المركزي الذي مركزه O، r الدوران الذي مركزه O وزاويته $\frac{\pi}{2}$، h التحاكي الذي مركزه O ونسبته $\sqrt{3}$. • أحسب لاحقة كلا من النقط B، C، D علماً أن: $B=s(A)$، $C=r(A)$، $D=h(C)$. (يتبع)

5	• بيّن أن A هي صورة B بالدوران الذي مركزه D وزاويته $\frac{\pi}{3}$. استنتج طبيعة المثلث ABD.

الحل: $B=s(A)$ يكافئ $\overrightarrow{OB}=-\overrightarrow{OA}$ معناه $z_B=-z_A$ أي $z_B=1-\sqrt{3}-i$.

$C=r(A)$ يكافئ $z_C=e^{i\frac{\pi}{2}}z_A$ معناه $z_C=iz_A$ أي $z_C=-1+i(-1+\sqrt{3})$.

$D=h(C)$ يكافئ $z_D=\sqrt{3}z_C$ أي $z_D=-\sqrt{3}+i(3-\sqrt{3})$.

• يكفي التحقّق من العلاقة: $z_A-z_D=e^{i\frac{\pi}{3}}(z_B-z_D)$

لدينا من جهة: $z_A-z_D=-1+\sqrt{3}+i-(-\sqrt{3}+i(3-\sqrt{3}))=(2\sqrt{3}-1)+i(-2+\sqrt{3})$

ومن جهة أخرى: $e^{i\frac{\pi}{3}}(z_B-z_D)=\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(1+i(\sqrt{3}-4))=(2\sqrt{3}-1)+i(-2+\sqrt{3})$.

وبالتالي: $z_A-z_D=e^{i\frac{\pi}{3}}(z_B-z_D)$ إذاً: A هي صورة B بالدوران الذي مركزه D وزاويته $\frac{\pi}{3}$.

• الكتابة الأخيرة تعني أن: $(\overrightarrow{DA};\overrightarrow{DB})=\frac{\pi}{3}+2k\pi$ / $k\in Z$ و $DA=DB$

هذا يعني أن المثلث ABD متساوي الساقين وزاوية الرأس الأساس D هي $60°$.

وبالتالي المثلث ABD متقايس الأضلاع.

تمارين للتدريب

1. حل في مجموعة الأعداد المركّبة $\mathbb{C}$ المعادلات التالية:

$-z^2+2z-11=0$, $2z+i\bar{z}+8i=0$, $2z+i-(3-i)^2=7i+iz-1$

$\alpha\in R$ / $z^2-2z\sin\alpha+1=0$ ، $z^3+z^2+z+1=0$ ، $z^4+(3-4i)z^2-12i=0$

$\alpha\in\left]0;\pi\right[$ / $z^2\sin^2\alpha+z\sin 2\alpha+1=0$

2. نعتبر العددين المركبين $z_1=\sqrt{2}+i\sqrt{2}$ و $z_2=2+2i\sqrt{3}$

اكتب على الشكل المثلثي الأعداد التالي: z_1 ، z_2 ، z_1z_2 ، $\frac{z_2}{z_1}$ ، z_1^3. استنتج قيمة كلا من العددين $\cos\frac{7\pi}{12}$ و $\sin\frac{7\pi}{12}$.

3. f الدالة المعرّفة على المجموعة $\mathbb{C}-\{-i\}$ بالدستور: $f(z)=\frac{iz}{z+i}$

نعتبر النقطة M ذات اللاحقة z في المستوي المركّب المزوّد بالمعلم المتعامد والمتجانس المباشر $(O;\vec{i};\vec{j})$.

- عيّن إحداثيات النقطة A ذات اللاحقة z_0 حيث: $f(z_0)=1+2i$.
- من أجل كل عدد مركب z من $\mathbb{C}-\{-i\}$، نضع: r طويلة العدد $(z+i)$ وَ العدد α عمدة له.

أعط الشكل المثلثي للعدد المركّب $f(z)+i$ بدلالة r و α.

- نعتبر النقطة I ذات اللاحقة $-i$.

عيّن Ω مجموعة النقط M من المستوي والتي تحقق: $|f(z)+i|=\sqrt{2}$.

عيّن Ω' مجموعة النقط M من المستوي والتي تحقق: $\arg(f(z)+i)\equiv\frac{\pi}{4}[2\pi]$.

- بيّن أن النقطة A تنتمي إلى $\Omega\cap\Omega'$، ثم أنشئ المجموعتين Ω وَ Ω'.

4. في المستوي المركّب المزوّد بالمعلم المتعامد والمتجانس المباشر $(O;\vec{i};\vec{j})$،

نعتبر النقط A، B، C التي لواحقها على الترتيب $z_A=-2$ ، $z_B=1+i$ ،

$z_C=-1-3i$

- تعرّف على طبيعة المثلث ABC.
- من أجل كل عدد مركّب $z\neq 1+i$ نضع: $Z=\frac{z+1+3i}{z-1-i}$
  - فسّر هندسيا طويلة وعمدة العدد المركّب Z.
  - عيّن وأنشئ Λ مجموعة النقط M صور العدد z بحيث: $|Z|=1$.
  - عيّن وأنشئ Ψ مجموعة النقط M صور العدد z بحيث يكون Z تخيلي صرف.

5. في المستوي المركّب المزوّد بالمعلم المتعامد والمتجانس المباشر $(O;\vec{i};\vec{j})$، نعتبر النقطة A ذات اللاحقة 1، ومن أجل كل عدد حقيقي θ من المجال $[0;2\pi]$ النقطة M ذات اللاحقة $z=e^{i\theta}$.

نضع: P وَ Q النقطتان ذات اللاحقتان $1+z$ و z^2 على الترتيب.

- انطلاقا من النقطة M أعط إنشاء هندسيا لكل من النقطتين P و Q. ضع النقط O، A، M، P وَ Q في نفس الشكل.
- عيّن وأنشئ مجموعة النقط P من المستوي عندما يتغيّر θ في $[0;2\pi]$.
- نضع: S لاحقة العدد المركّب (z^2+z+1) حيث z يمثّل دائما لاحقة النقطة M.
- عيّن وأنشئ مجموعة النقط S.
- في حالة $S\neq O$. أنشئ المستقيم (OS) وضع تخمينا حول النقط O، S وَ M.
- بيّن أن العدد $\frac{z^2+z+1}{z}$ حقيقي من أجل كل θ من المجال $[0;2\pi]$. استنتـــج.

6. المستوي المركّب مزوّد بالمعلم المتعامد والمتجانس المباشر $(O;\vec{i};\vec{j})$.

- حل في مجموعة الأعداد المركّبة $\mathbb{C}$ المعادلة: $z^2-8\sqrt{3}z+64=0$.
- نعتبر النقطتين A و B ذات اللاحقتين $z_A=4\sqrt{3}-4i$ و $z_B=4\sqrt{3}+4i$
  - أكتب العددين z_A و z_B على الشكل الأسي.
  - احسب المسافات OA , OB , AB، واستنتج طبيعة المثلث OAB.
- نعتبر النقطة E صورة العدد المركّب $\sqrt{3}-i$ و النقطة D صورتها بالدوران الذي مركزه O وزاويته $-\frac{\pi}{3}$. عيّن اللاحقة d للنقطة D.
- نعتبر النقطة G مرجّح الجملة المثقلة $\{(O;-1);(D;1);(B;1)\}$.

تحقق من وجود النقطة G، ثم عيّن لاحقتها g. بيّن أن النقط E، D، G على استقامة واحدة.

7. f التحويل النقطي في المستوي الذي يرفق بكل نقطة M ذات اللاحقة z، النقطة M' ذات اللاحقة z' حيث: $z'=3z+3-i$.

- بيّن أن للتحويل النقطي f نقطة صامدة وحيدة Ω يطلب تعيين لاحقتها ω.
- تحقّق أن: $z'-\omega=3(z-\omega)$ و استنتج طبيعة f.

8. f التحويل النقطي في المستوي الذي يرفق بكل نقطة M ذات اللاحقة z، النقطة M' ذات اللاحقة z' حيث: $z' = -\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)z$.

بيّن أن f دورانا مركزه O يطلب تعيين زاويته. عيّن صورة حامل محور الفواصل بالدوران f.

9. s التحويل النقطي في المستوي الذي يرفق بكل نقطة M ذات اللاحقة z، النقطة M' ذات اللاحقة z' حيث: $z' = -z + 4$.

- بيّن أن للتحويل النقطي s نقطة صامدة واحدة A يطلب تعيين لاحقتها a.
- بيّن أن s هو التناظر المركزي والذي مركزه A.
- r الدوران الذي مركزه O وزاويته $\frac{\pi}{2}$، نضع: $M'' = (r \circ s)(M)$.
- أنشئ النقطة M'' من أجل $z = 3 + i$.

بيّن أن النقطة M'' هي صورة النقطة M بدوران يطلب تعيين مركزه وزاويته.

10. المستوي المركّب مزوّد بالمعلم المتعامد والمتجانس المباشر $(O;\vec{i};\vec{j})$.

T التحويل النقطي في المستوي الذي يرفق بكل نقطة M ذات الإحداثيات $(x;y)$، النقطة M' ذات الإحداثيات $(x';y')$،

حيث: $\begin{cases} x' = ax - by + a' \\ y' = bx + ay + b' \end{cases}$ ، a، b، a'، b' أعداد حقيقية.

- بيّن أن اللاحقتين z وَ z' للنقطتين M وَ M' على الترتيب تحققان العلاقة $z' = mz + p$ حيث m وَ p عددان مركّبان يطلب تعيينهما بدلالة الأعداد a، b، a' وَ b'.
- عيّن الأعداد a، b، a' و b' حتى يكون التحويل النقطي T انسحابا شعاعه $\vec{v} = -2\vec{i} + \vec{j}$.
- عيّن الأعداد a، b، a' و b' حتى يكون التحويل النقطي T تحاكا نسبته 3 ومركزه $A(1;2)$.
- عيّن الأعداد a، b، a' و b' حتى يكون التحويل النقطي T دورانا زاويته $\frac{3\pi}{4}$ ومركزه $I(0;2)$.

8- التشابهات المستوية المباشرة

ما يجب أن يعرف:

★ عموميات حول التشابهات المستوية

تعريف

التشابه المستوي هو التحويل النقطي في المستوي الذي يحافظ على تناسب المسافات.

أي: من أجل النقط الأربعة A، B، C و D وصورها A'، B'، C' وَ D' على الترتيب بالتشابه المستوي، لدينا: $\frac{AB}{CD} = \frac{A'B'}{C'D'}$.

أي: التشابه المستوي هو التحويل النقطي في المستوي الذي يضاعف المسافات k مرة.

العدد الحقيقي الموجب **تماما** k يدعى نسبة التشابه.

التقايس (أو تساوي القياس) هو التشابه المستوي نسبته 1.

خـــواص

- مركّب تشابهين المستوي نسبتاهما k وَ k' هو تشابه المستوي نسبته kk'.
- التحويل العكسي للتشابه المستوي الذي نسبته k هو التشابه المستوي الذي نسبته $\frac{1}{k}$.
- التشابه المستوي يحافظ على استقامية النقط.
- التشابه المستوي يحوّل كل مثلث ABC إلى مثلث $A'B'C'$ يشبهه.
- التشابه المستوي يحافظ على الزوايا.

★ التشابه المستوي المباشر

تعريف التشابه المستوي المباشر هو التشابه المستوي الذي يحافظ على الزوايا الموجّهة.

أي: من أجل النقط الأربعة A ، B ، C وَD حيث $A \neq B$ وَ $C \neq D$

وصورها A' ، B' ، C' وَ D' على الترتيب بالتشابه المستوي المباشر،

لدينا: $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{CD}) = (\overrightarrow{A'B'};\overrightarrow{C'D'}) + 2l\pi$ / $l \in \mathbb{Z}$.

الانسحاب،التحاكي،الدوران، هي تشابهات المستوي المباشر.

خواص

- مركّب تشابهين المستوي المباشر زاويتاهما θ و θ' هو تشابه المستوي المباشر زاويته $\theta + \theta'$.
- التحويل العكسي للتشابه المستوي المباشر الذي زاويته θ هو التشابه المستوي المباشر الذي زاويته $-\theta$.
- التشابه المستوي المركّب المباشر يحوّل النقطة ذات اللاحقة z إلى النقطة ذات اللاحقة z' معرّف بالعبارة: $z' = az + b$ حيث a وَ b عددان مركّبان وَ $a \neq 0$.
- في العبارة $z' = az + b$ حيث $a \neq 0$ لدينا: $\arg(a)$ يدعى زاوية التشابه المستوي المباشر.
- التشابه المستوي المباشر الذي يختلف عن الانسحاب، يقبل نقطة صامدة **واحدة** تدعى مركزه.

للحفظ

s تشابه المستوي المباشر نسبته k وزاويته θ ومركزه النقطة الصامدة Ω . (s ليس انسحاب)

- s هو مركّب (تبديلي) للتحاكي الذي مركزه Ω ونسبته k مع الدوران الذي مركزه Ω وزاويته θ .
- s تشابه المستوي المباشر نسبته k وزاويته θ ومركزه النقطة الصامدة Ω .
(s ليس انسحاب)، يحوّل النقطة M (حيث $M \neq \Omega$) إلى النقطة M'
حيث: $\Omega M' = k\Omega M$ وَ $(\overrightarrow{\Omega M};\overrightarrow{\Omega M'}) \equiv \theta[2\pi]$

يتبع...

- s تشابه المستوي المباشر نسبته k وزاويته θ ومركزه النقطة الصامدة Ω . (s ليس انسحاب)، يحوّل النقطة M ذات اللاحقة z (حيث $M \neq \Omega$) إلى النقطة M' ذات اللاحقة z' يعطى بالعبارة: $z' - \omega = ke^{i\theta}(z - \omega)$ / ω لاحقة Ω .
- التشابه المستوي المباشر يحافظ على تشابه مباشر للمثلثات، ويحافظ على مرجّح الجملة المثقلة.
- التشابه المستوي المباشر يحوّل المستقيم على مستقيم، والقطعة المستقيمة إلى قطعة مستقيمة، والدائرة إلى دائرة.
- التشابه المستوي الذي يترك ثلاث نقط صامدة ليست على استقامة واحدة هو التحويل المطابق.
- التشابه المستوي الذي يترك نقطتان صامدتان A وَ B متمايزتان هو التحويل المطابق أو التناظر المحوري بالنسبة للمستقيم (AB) .
- من أجل كل أربع نقط A ، B ، C وَD حيث: $A \neq B$ وَ $C \neq D$ ، يوجد تشابه المستوي المباشر f وحيد حيث: $f(A) = C$ وَ $f(B) = D$.

★ الإزاحة

تعريف الإزاحة هو تشابه المستوي المباشر نسبته 1.

أي: الإزاحة هو تقايس يحافظ على الزوايا الموجّهة.

الإزاحة هو الانسحاب أو الدوران

للحفظ

نعتبر s التشابه المستوي. لدينا حالتين:

① إما s التشابه المستوي المباشر.

② إما s هو مركّب تشابه المستوي المباشر مع تناظر محوري بالنسبة لـ Δ (يختار كيفيا).

في هذه الحالة الثانية s يحوّل كل زاوية إلى زاوية معاكسة. ويدعى s التشابه المستوي **غير** المباشر محوره Δ .

تمارين محلولة

التعرّف على التشابه المستوي

1

$(O;\vec{i};\vec{j})$ معلم للمستوي متعامد ومتجانس مباشر.

f الدالة في المستوي ترفق بكل نقطة ذات اللاحقة z النقطة ذات اللاحقة z' حيث: $z' = (1-i)z + 2 - i$.

بيّن أن الدالة f هي التشابه المستوي المباشر بطلب تعيين عناصره المميّزة.

الحل: العبارة $z' = (1-i)z + 2 - i$ هي من الشكل: $z' = az + b$ حيث: $a = 1 - i$ وَ $b = 2 - i$ إذاً: f هو التشابه المستوي المباشر.

لدينا: $|a| = |1-i| = \sqrt{2}$ وَ $\arg a = \arg(1-i) = -\frac{\pi}{4} + 2l\pi \ / \ l \in \mathbb{Z}$

أي: نسبة التشابة f هي $\sqrt{2}$ وَ زاويته $-\frac{\pi}{4}$

مركز التشابه المستوي المباشر f هي النقطة الصامدة Ω ذات اللاحقة z_0

تحقق: $z_0 = (1-i)z_0 + 2 - i$ أي: $z_0 = -1 - 2i$.

مركّب دوران وتحاك

2

A، B، C وD أربع نقط من المستوي المركّب، لواحقها على الترتيب 0، 1، $1+i$ وَ i. نعتبر النقطة K منتصف القطعة المستقيمة $[AC]$.

h التحاكي الذي مركزه D ونسبته $\frac{1}{2}$ وَ r الدوران الذي مركزه K وزاويته $\frac{\pi}{2}$.

- أعط العبارة المركّبة لكل من h وَ r.
- استنتج طبيعة التحويل النقطي $h \circ r$ وعناصره المميّزة.

الحل: العبارة المركّبة للتحاكي h مركزه D لاحقتها i ونسبته $\frac{1}{2}$ هي من

الشكل: $z' - i = \frac{1}{2}(z - i)$ أي: $z' = \frac{1}{2}z + \frac{1}{2}i$.

العبارة المركّبة للدوران r مركزه K لاحقتها $\frac{1+i}{2}$ وزاويته $\frac{\pi}{2}$ هي من

الشكل: $z' - \frac{1+i}{2} = e^{i\frac{\pi}{2}}\left(z - \frac{1+i}{2}\right)$ أي: $z' = iz + 1$

استخراج العبارة المركّبة للتحويل النقطي $h \circ r$.

لدينا المخطّط

$$z \xrightarrow{\ r\ } z_1 \xrightarrow{\ h\ } z' \qquad (h \circ r : z \mapsto z')$$

$r(z) = z_1$ يكافئ $z_1 = iz + 1$

$h(z_1) = z'$ يكافئ $z' = \frac{1}{2}z_1 + \frac{1}{2}i$

أي: $h[r(z)] = z'$ يكافئ $z' = \frac{1}{2}(iz + 1) + \frac{1}{2}i = \frac{i}{2}z + \frac{1+i}{2}$

هي عبارة مركّبة من الشكل: $z' = az + b$ حيث: $a = \frac{i}{2}$ و $b = \frac{1+i}{2}$

إذاً: $h \circ r$ تشابه المستوي المباشر نسبته $|a| = \left|\frac{i}{2}\right| = \frac{1}{2}$ وزاويته $\arg a = \frac{\pi}{2}$

ومركزه النقطة الصامدة Ω ذات اللاحقة z_0 تحقق $z_0 = \frac{i}{2}z_0 + \frac{1+i}{2}$ أي: $z_0 = \frac{1+3i}{5}$.

التعرّف على المحل الهندسي

3

نعتبر في المستوي الموجّه المثلث ABC القائم في B والمتساوي الساقين. M نقطة كيفية من المستقيم (BC) و M' النقطة من المستوي بحيث يكون المثلث AMM' قائم في M ومتساوي الساقين.

- أعط النسبة k والزاوية θ للتشابه المستوي المباشر S الذي مركزه A ويحوّل النقطة M إلى النقطة M'.
- عيّن مجموعة النقط M' من المستوي عندما تتغيّر النقطة M على المستقيم (BC).

الحل: التشابه المستوي المباشر s مركزه A ويحوّل النقطة M إلى النقطة M' معناه:
$AM' = kAM$ وَ $(\overrightarrow{AM};\overrightarrow{AM'}) = \theta[2\pi]$.

إذاً: $k = \frac{AM'}{AM} = \sqrt{2}$ (حسب علاقة *Pythagore*) وَ $\theta = \frac{\pi}{4} + 2l\pi \ / \ l \in Z$.

(كون $\hat{A} = \hat{M}' = \frac{\pi}{4}$ في المثلث AMM').

عندما تتغيّر النقطة M على المستقيم (BC) فإن صورتها M' بالتشابه s تتغيّر على المستقيم $s(BC)$.

بما أن B نقطة من (BC) فإن صورتها $s(B) = C$ نقطة من المستقيم $s(BC)$.

ومن أجل كل نقطة M من المستقيم (BC) تختلف عن B ،صورتها M' تحقق:
$(\overrightarrow{BM};\overrightarrow{CM'}) = \frac{\pi}{4}$

إذاً: المحل الهندسي للنقطة M' هو المستقيم الذي يشمل C ويصنع مع المستقيم (BM) زاوية قياسها $\frac{\pi}{4}$

التشابه المستوي غير المباشر

4

$(O;\vec{i};\vec{j})$ معلم للمستوي متعامد ومتجانس مباشر. f التحويل النقطي في المستوي الذي يحوّل النقطة M ذات الإحداثيات $(x;y)$ إلى النقطة M' ذات الإحداثيات $(x';y')$ حيث: $x' = 2y+2$ وَ $y' = 2x-1$

- بيّن أن f يقبل نقطة صامد واحدة Ω يطلب تعين إحداثياتها.
- بيّن أن f تشابه المستوي نسبته 2 .
- h هو التحاكي الذي مركزه Ω ونسبه 2 ،يحوّل النقطة M إلى النقطة M_1 .

بيّن أن منتصف القطعة المستقيمة $[M'M_1]$ يمّر من المستقيم Δ الذي يشمل النقطة Ω ،يطلب تعين معادلة للمستقيم Δ .ماذا تستنتج إذاً عن التشابه f ؟

الحل: $\Omega(x;y)$ صامدة في التحويل f معناه $f(\Omega) = \Omega$ أي: $x = 2y+2$ وَ $y = 2x-1$

أي: $x = 0$ وَ $y = -1$ بما أن الجملة التحليلية قبلت حلا واحداً فإن $\Omega(0;-1)$ وحيدة.

نعتبر $M(x;y)$ وَ $N(a;b)$ نقطتان من المستوي وَ M' وَ N' صورتيهما على الترتيب بالتحويل النقطي f .

لدينا إذاً: $MN^2 = (a-x)^2 + (b-y)^2$ وَ

$$M'N'^2 = (a'-x')^2 + (b'-y')^2$$
$$= 4\left[(a-x)^2 + (b-y)^2\right] = 4MN$$

أي: $M'N' = 2MN$ هذا يعني أن f التشابه المستوي نسبته 2 .

h هو التحاكي الذي مركزه Ω ونسبته 2 ويحوّل النقطة M إلى النقطة M_1 **معناه**

$$\Omega M_1 = 2\Omega M$$

بوضع: $M_1(x_1;y_1)$ نحصل على العبارة التحليلية للتحاكي h : $x_1 = 2x$ وَ $y_1 = 2y+1$

إذاً: إحداثيات النقطة I منتصف القطعة $[M'M_1]$ هي: $(x_I;y_I)$

حيث: $x_I = x+y+1$ وَ $y_I = x+y$.

ينتج أن: $x_I = y_I + 1$ وهي العلاقة بين إحداثيات منتصف القطعة $[M'M_1]$.

وبالتالي مجموعة منتصفات القطع $[M'M_1]$ هي المستقيم Δ ذي المعادلة: $y = x-1$. واضح أن إحداثيات Ω تحقق معادلة Δ .

نلاحظ أن $\overrightarrow{M'M_1}\begin{pmatrix}2x-2y-2\\2y-2x+2\end{pmatrix} = (2x-2y-2)\vec{n}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$ حيث: $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$ هو شعاع ناظم للمستقيم Δ .

أي $\overrightarrow{M'M_1}$ يعامد Δ وبما أن منتصف القطعة $[M'M_1]$ يقع على Δ ، فإن M' وَ M_1 متناظرتان بالنسبة للمستقيم Δ .

إذاً: f هو التشابه المستوي غير المباشر ، مركزه Ω ونسبته 2 ومحوره Δ .

التشابه المستوي غير المباشر ذو نقطتين صامدتين على الأقل

5	$(O;\vec{i};\vec{j})$ معلم للمستوي المركّب متعامد ومتجانس مباشر. f التحويل النقطي في المستوي الذي يحوّل النقطة M ذات اللاحقة z إلى النقطة M' ذات اللاحقة z' حيث: $z'=\frac{4+3i}{5}\bar{z}-1+3i$ • عيّن مجموعة النقط الصامدة في التحويل f. • عيّن طبيعة التحويل f وأذكر عناصره المميّزة.

الحل: النقطة M ذات اللاحقة z صامدة في التحويل f معناه $f(M)=M$

أي: $z=\frac{4+3i}{5}\bar{z}-1+3i$

يكافئ: $x+iy=\frac{4+3i}{5}(x-iy)-1+3i$ يكافئ: $(x-3y+5)+i(-3x+9y-15)=0$

يكافئ: $\begin{cases} x-3y+5=0 \\ -3x+9y-15=0 \end{cases}$ يكافئ: $x-3y+5=0$

يعني أن مجموعة النقط الصامدة في التحويل f هي المستقيم Δ الذي معادلته $x-3y+5=0$.

العبارة $z'=\frac{4+3i}{5}\bar{z}-1+3i$ هي من الشكل: $z'=a\bar{z}+b$

حيث: $a=\frac{4+3i}{5}$ و $b=-1+3i$

إذاً: f هو التشابه المستوي **غير** المباشر. وبما أن f يترك أكثر من نقطة صامدة واحدة وكلها على استقامة واحدة. يعني أن: f هو التناظر المحوري بالنسبة للمستقيم Δ.

تمارين للتدريب

1. ABC مثلث قائم في A ومتساوي الساقين، I منتصف القطعة $[BC]$.

• أعط العناصر المميّزة لكل من التشابه المستوي المباشر s الذي مركزه B ويحوّل I إلى A وَ التشابه المستوي المباشر s' الذي مركزه B ويحوّل A إلى C.

• عيّن طبيعة التحويل النقطي $s'\circ s$ واذكر عناصره المميّزة.

2. $(O;\vec{i};\vec{j})$ معلم للمستوي المركّب متعامد ومتجانس مباشر. نعتبر النقطتين A وَ B ذات اللاحقتين $\sqrt{2}$ وَ i على الترتيب. C النقطة من المستوي بحيث يكون الرباعي $OACB$ مستطيل.

نضع: I منتصف القطعة $[OA]$ و J منتصف القطعة $[BC]$.

• f التحويل النقطي في المستوي الذي يحوّل النقطة M ذات اللاحقة z إلى النقطة M' ذات اللاحقة z' حيث: $z'=\frac{-i\sqrt{2}}{2}z+\frac{\sqrt{2}}{2}+i$

• بيّن أن f هو التشابه المستوي المباشر ثم عيّن مركزه Ω ونسبته k وزاويته θ.

• عيّن صور النقط O، A، B و C بالتشابه f.

• بيّن أن النقط Ω، A و B على استقامة واحدة، وأن النقط Ω، I و C على استقامة واحدة.

• استنتج إنشاء للنقطة Ω.

• بيّن أن Ω نقطة من الدائرة التي قطرها $[BC]$ ومن الدائرة التي قطرها $[IA]$.

3. f التحويل النقطي في المستوي المركّب، يحوّل النقطة M ذات اللاحقة z إلى النقطة M' ذات اللاحقة z' حيث: $z'=a^2z+a-1$ حيث a عدد مركّب معطى.

• عيّن مجموعة قيم a التي من أجلها يكون التحويل f سحبا. حدّد f من أجل كل قيمة للعدد a المحصل عليها.

• عيّن مجموعة قيم a التي من أجلها يكون التحويل f تناظر مركزي. حدّد f من أجل كل قيمة للعدد a المحصل عليها.

• عيّن مجموعة قيم a التي من أجلها يكون التحويل f تحاك نسبته -2. حدّد f من أجل كل قيمة للعدد a المحصل عليها.

• عيّن مجموعة قيم a التي من أجلها يكون التحويل f دورانا زاويته $\frac{\pi}{2}$. حدّد f من أجل كل قيمة للعدد a المحصل عليها.

• حدّد f من أجل $a=1-i$.

4. $(O;\vec{i};\vec{j})$ معلم للمستوي المركّب متعامد ومتجانس مباشر. نعتبر النقطتين $A(3;-1)$ و $B(0;2)$.

h التحاكي الذي مركزه A ونسبته $\sqrt{2}$ ، r الدوران الذي مركزه B وزاويته $\frac{3\pi}{4}$،
و t الانسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{BO}$.

• أنشئ النقطة D من المستوي والتي صورتها بالتحويل $t\circ r\circ h$ هي النقطة O.

• بيّن أن التحويل النقطي $t\circ r\circ h$ هو التشابه المستوي المباشر s وعيّن عناصره المميّزة.

• بملاحظة أن المثلث $OD\Omega$ قائم ومتساوي الساقين، أنشئ النقطة Ω مركز التشابه s.

5. نعتبر المربعين المباشرين $ABCD$ و $A'B'C'D'$.

• بيّن أن يوجد التشابه المستوي المباشر s الذي يحوّل النقط A ، B ، C و D إلى النقط A' ، B' ، C' و D' بهذا الترتيب.

• نفرض أن المستقيمين (AB) و $(A'B')$ متوازيين، ماذا يمكننا القول عن التشابه s؟ في حالة وجود مركز للتشابه s عيّن وضعيته.

• نفرض أن المستقيمين (AB) و $(A'B')$ غير متوازيين، ونعتبر P نقطة تقاطع المستقيمين (AB) و $(A'B')$ و Q نقطة تقاطع المستقيمين (CD) و $(C'D')$.

بيّن أن المستقيم (PQ) يشمل المركز Ω للتشابه s. ثم استنتج إنشاء للنقطة Ω.

6. $(O;\vec{i};\vec{j})$ معلم للمستوي المركّب متعامد ومتجانس مباشر. نعتبر الرباعي المحدّب المباشر $ABCD$. ننشئ خارج هذا الرباعي النقط M_1 ، M_2 ، M_3 و M_4 بحيث تكون المثلثات الأربعة AM_1B ، BM_2C ، CM_3D و DM_4A قائمة عند النقط M_1 ، M_2 ، M_3 و M_4 على الترتيب ومتساوية الساقين.

• نضع: a ، b ، c و d لواحق النقط A ، B ، C و D على الترتيب و z_1 ، z_2 ، z_3 و z_4 لواحق النقط M_1 ، M_2 ، M_3 ، M_4 على الترتيب.

• باعتبار التشابه الذي مركزه A ويحوّل النقطة B إلى النقطة M_1 ،
بيّن أن $z_1=\frac{a+b+i(a-b)}{2}$.

• عبّر عن z_2 ، z_3 و z_4 بدلالة الأعداد a ، b ، c و d.

• بيّن أن حاملا القطعتين $[M_1M_3]$ و $[M_2M_4]$ متعامدين وأن $M_1M_3=M_2M_4$.

7. $(O;\vec{i};\vec{j})$ معلم للمستوي المركّب متعامد ومتجانس مباشر. f التحويل النقطي في المستوي الذي يحوّل النقطة M ذات اللاحقة z إلى النقطة M' ذات اللاحقة z' حيث: $z'=\frac{3+i\sqrt{3}}{4}z+\frac{1-i\sqrt{3}}{2}$

• عيّن صورة النقطة A ذات اللاحقة 2 بالتحويل f ، ولاحقة النقطة B حيث: $f(B)=O$.

• تعرّف على طبيعة التحويل f واذكر عناصره المميّزة.

• في حالة $M\neq A$ بيّن أن المثلث AMM' قائم في النقطة M'.

8. $(O;\vec{i};\vec{j})$ معلم للمستوي المركّب متعامد ومتجانس مباشر.

• عيّن (E) مجموعة النقط M من المستوي والتي لاحقتها z تحقق: $\left|(1-i\sqrt{3})z-i-\sqrt{3}\right|=4$.

• أعط العبارة المركّبة للتشابه المستوي المباشر s الذي يحوّل النقطة A ذات اللاحقة i إلى النقطة O ويحوّل النقطة B ذات اللاحقة $\sqrt{3}$ إلى النقطة B' ذات اللاحقة $-4i$.
معيّناً مركز ونسبة وزاوية التشابه s.

• باستعمال نتائج السؤال السابق، أوجد المجموعة (E) المعرّفة في التمرين.

9. $(O;\vec{i};\vec{j})$ معلم للمستوي المركّب متعامد ومتجانس مباشر.

s التشابه المستوي المباشر، مركزه O ونسبته $\frac{\sqrt{3}}{2}$ وزاويته $\frac{\pi}{6}$.

من أجل n عدد طبيعي، نعتبر مجموعة النقط M_n المعرّفة بـ: $M_{n+1}=s(M_n)$

وَ M_0 النقطة ذات اللاحقة 1.

نرمز بـ: z_n للاحقة النقطة M_n.

- أعط العبارة المركّبة للتشابه المستوي المباشر s.
- بيّن أن المتتالية $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ هندسية، واكتب عبارة z_n بدلالة n.
- احسب z_1 ، z_2 ، z_3 وَ z_n.
- أحسب OM_n بدلالة n
- بيّن أن $\frac{z_{n+1}-z_n}{z_{n+1}} = \frac{i}{\sqrt{3}}$ واستنتج أن: $(M_nM_{n+1}) \perp (OM_{n+1})$

وأن $M_nM_{n+1} = \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n$

- نضع: $K_n = M_0M_1 + M_1M_2 + ... + M_nM_{n+1}$. عبّر عن K_n بدلالة n
- احسب $\lim_{n \to +\infty} K_n$

10. $(O;\vec{i};\vec{j})$ معلم للمستوي المركّب متعامد ومتجانس مباشر.

(D) المستقيم الذي يشمل المبدأ O و $\vec{u}$ شعاع توجيه له.

نرمز بـ: α لقياس الزاوية $(\vec{i};\vec{u})$.

- تحقق أن النقطة A ذات اللاحقة $e^{i\alpha}$ تنتمي إلى المستقيم (D).
- استنتج أن العبارة المركّبة للتناظر المحوري $S_{(D)}$ بالنسبة للمستقيم (D) هي: $z' = e^{2i\alpha}\bar{z}$.
- ضع الشكل النهائي للعبارة المركّبة للتحويل $S_{(D)}$ في كل من الحالتين: $(D): x - y\sqrt{3} = 0$, $(D): y = -x$.

9- الهندسة الفضائية

ما يجب أن يعرف:

✦ الجداء السلمي في الفضاء

تعريف

$\vec{u}$ وَ $\vec{v}$ شعاعان من الفضاء.

A، B، C ثلاث نقط من الفضاء تحقق: $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ و $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$

يوجد على الأقل مستو P يشمل النقط A ، B ، C.

الجداء السلمي للشعاعين $\vec{u}$ وَ $\vec{v}$ في الفضاء هو الجداء السلمي للشعاعين $\overrightarrow{AB}$ وَ $\overrightarrow{AC}$ في المستوي P . وهو العدد الحقيقي $\vec{u} \cdot \vec{v}$ المعرّف بـ:

$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u};\vec{v})$ حيث: $\vec{u} \neq \vec{0}$ وَ $\vec{v} \neq \vec{0}$

وَ $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ من أجل $\vec{u} = \vec{0}$ أو $\vec{v} = \vec{0}$

✦ التعامد في الفضاء

للحفظ

- $\vec{u}$ وَ $\vec{v}$ شعاعان من الفضاء متعامدان **معناه** $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.
- المستقيمان (D) وَ (D') من الفضاء متعامدان **معناه** شعاعي توجيههما $\vec{d}_{(D)}$ و $\vec{d}_{(D')}$ متعامدان.
- الشعاع $\vec{n}$ ناظم على المستقيم (D) **معناه** $\vec{n}$ يعامد شعاع التوجيه $\vec{d}_{(D)}$ للمستقيم (D).
- الشعاع $\vec{n}$ ناظم على المستوي (P) في الفضاء **معناه** $\vec{n}$ يعامد شعاعان غير مرتبطين خطياً من (P).

يتبع...

• المستقيم (D) يعامد المستوي (P) **معناه** شعاع توجيه لمستقيم (D) هو شعاع ناظم على المستوي (P).

• المستويان (P) وَ (P') في الفضاء متعامدان **معناه** شعاعيهما الناظم $\vec{n}_{(P)}$ و $\vec{n}_{(P')}$ متعامدان.

★ المعادلة الديكارتية للمستوي

تعريف

$(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ معلم متعامد ومتجانس للفضاء. (P) مستو من الفضاء يشمل النقطة A وَ $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ شعاع ناظم له.

من أجل كل نقطة $M(x;y;z)$ من الفضاء:

$M(x;y;z)\in(P)$ **معناه** $\overrightarrow{AM}\cdot\vec{n}=0$

من التكافؤ الأخير تنتج معادلة للمستوي (P) من الشكل:

$ax+by+cz+d=0$ حيث $d\in\mathbb{R}$.

للحفظ

$(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ معلم متعامد ومتجانس للفضاء.

• المسافة بين النقطتين $A(x_0;y_0;z_0)$ وَ $B(x_1;y_1;z_1)$ هي:

$$AB=\sqrt{(x_1-x_0)^2+(y_1-y_0)^2+(z_1-z_0)^2}$$

• المسافة بين النقطة $A(x_0;y_0;z_0)$ والمستوي (P) الذي معادلته $ax+by+cz+d=0$ هي: $\dfrac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

تمارين محلولة

التعامد في الفضاء

1

A، B، C وَ D أربع نقط من الفضاء.

• برهن صحّة التكافؤ التالي:

$AC^2+BD^2=AD^2+BC^2$ **إذا وفقط إذا** كان المستقيمان (AB) وَ (CD) متعامدان.

• $ABCD$ رباعي الوجوه حيث (AB) وَ (CD) متعامدان و (AD) وَ (BC) متعامدان.

بيّن أن المستقيمان (AC) وَ (BD) متعامدان.

الحل: $AC^2+BD^2=AD^2+BC^2$ يكافئ $(AC^2-AD^2)+(BD^2-BC^2)=0$

يكافئ $(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AD})(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD})+(\overrightarrow{BD}-\overrightarrow{BC})(\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{BC})=0$

يكافئ $\overrightarrow{DC}\cdot(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD})+\overrightarrow{CD}(\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{BC})=0$

يكافئ $\overrightarrow{DC}\cdot(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{BD}-\overrightarrow{BC})=0$ أي $\overrightarrow{DC}\cdot(2\overrightarrow{AB})=0$

يعني أن الشعاعان $\overrightarrow{DC}$ وَ $\overrightarrow{AB}$

وبالتالي في حالة $A\neq B$ وَ $C\neq D$ يكون لدينا: المستقيمان (AB) وَ (CD) متعامدان.

لدينا المستقيمان (AB) وَ (CD) متعامدان، ينتج حسب ما سبق أن:

$AC^2+BD^2=AD^2+BC^2$ ......(1)

ومن تعامد (AD) وَ (BC) ينتج كذلك بإتباع نفس العلاقة السابقة أن: $AC^2+BD^2=AB^2+DC^2$ ......(2).

من (1) وَ (2) ينتج أن $AD^2+BC^2=AB^2+DC^2$ هذا يعني كذلك بإتباع نفس العلاقة السابقة أن: المستقيمان (AC) و (BD) متعامدان.

معادلات ديكارتية للمستقيم والمستوي في الفضاء

2

$(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ معلم متعامد ومتجانس للفضاء. $A(1;2;-1)$ ، $B(2;0;3)$
و $C(-1;3;2)$ ثلاث نقاط من هذا الفضاء.
أعط تمثيل وسيطي ثم ديكارتي للمستقيم (AB).
تحقق من وجود المستوي (ABC) ثم أعط معادلة ديكارتية له.

[ا]لحل: لدينا $\overrightarrow{AB}(1;-2;4)$ شعاع توجيه للمستقيم (AB)

$M(x;y;z)\in(AB)$ يكافئ $\overrightarrow{AM}=k\overrightarrow{AB}$

يكافئ $\begin{pmatrix}x-1\\y-2\\z+1\end{pmatrix}=k\begin{pmatrix}1\\-2\\4\end{pmatrix}$ / $k\in \mathbb{R}$

أي: $\begin{cases}x=k+1\\y=-2k+2\\z=4k-1\end{cases}$ / $k\in \mathbb{R}$ ويستنتج التمثيل الديكارتي بجملة [م]عادلتين مستقلتين عن k.

$\begin{cases}x=k+1\\y=-2k+2\\z=4k-1\end{cases}$ تكافئ $\begin{cases}k=x-1\\y=-2(x-1)+2\\z=4(x-1)-1\end{cases}$

تكافئ $\begin{cases}2x+y-4=0\\4x-z-5=0\end{cases}$ تدعى تمثيل ديكارتي للمستقيم (AB)

[ا]لمستوي (ABC) موجود إذا وفقط إذا كانت النقط A ، B ، C ليست على استقامة واحدة.

[أ]ي: المستوي (ABC) موجود إذا وفقط إذا كان الشعاعان $\overrightarrow{AB}$ ، $\overrightarrow{BC}$ غير مرتبطين خطيا.

[ن]فرض أن $\overrightarrow{AB}$ ، $\overrightarrow{BC}$ مرتبطين خطيا أي يوجد عدد حقيقي k بحيث: $\overrightarrow{AB}=k\overrightarrow{BC}$

[ي]عني أن: $\begin{pmatrix}1\\-2\\4\end{pmatrix}=k\begin{pmatrix}-3\\3\\-1\end{pmatrix}$ معناه $\begin{cases}-3k=1\\3k=-2\\-k=4\end{cases}$ أي $\begin{cases}k=-\frac{1}{3}\\k=\frac{-2}{3}\\k=-4\end{cases}$ وهذا تناقض

إذن الشعاعان $\overrightarrow{AB}$ ، $\overrightarrow{BC}$ غير مرتبطين خطيا. (هذا النمط للبرهان يدعى **البرهان بالخلف**).

نعلم أن للمستوي (ABC) معادلة ديكارتية من الشكل: $ax+by+cz+d=0$

يكفي إذاً البحث عن الأعداد a ، b ، c و d.

لدينا: $\begin{cases}A\in(ABC)\\B\in(ABC)\\C\in(ABC)\end{cases}$ معناه $\begin{cases}a+2b-c+d=0\\2a+3c+d=0\\-a+3b+2c+d=0\end{cases}$ تكافئ $\begin{cases}a=-\frac{10}{29}d\\b=-\frac{11}{29}d\\c=-\frac{3}{29}d\end{cases}$

نعطي أية قيمة للعدد d. مثلاً $d=29$

نحصل على معادلة المستوي: $(ABC):-10x-11y-3z+29=0$.

حساب مقدار

3

$(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ معلم متعامد ومتجانس للفضاء. $A(3;0;-1)$ ، $B(2;1;-1)$ ،
$C(4;2;5)$ و $D(3;4;3)$ أربع نقط من هذا الفضاء.

- تأكد أن المثلث ABC متساوي الساقين ثم احسب مساحته.
- تأكد أن للمستوي (ABC) معادلة ديكارتية من الشكل: $2x+2y-z-7=0$.
- أحسب المسافة بين النقطة D والمستوي (ABC)، ثم حجم رباعي الوجوه $ABCD$.

الحل: لدينا: $\overrightarrow{AB}(-1;1;0)$ ، $\overrightarrow{AC}(1;2;6)$ ، $BC(2;1;6)$

إذاً: $AB=\sqrt{1+1+0}=\sqrt{2}$ ، $AC=\sqrt{1+4+36}=\sqrt{41}$ و $BC=\sqrt{4+1+36}=\sqrt{41}$

يعني أن المثلث ABC متساوي الساقين ورأسه الأساس هو C.

مساحة المثلث ABC هي S_{ABC} حيث: $S_{ABC}=\frac{1}{2}AB\times CI$ و I منتصف القطعة $[AB]$

لدينا: $I\left(\frac{5}{2};\frac{1}{2};-1\right)$

أي: $S_{ABC}=AI\times CI=\frac{1}{\sqrt{2}}\times\frac{9}{\sqrt{2}}=\frac{9}{2}\,(u.a)$

و $AI=\frac{1}{\sqrt{2}}$ و $CI=\frac{9}{\sqrt{2}}$

• يكفي التحقق من أن إحداثيات النقط الثلاث A ، B و C تحقق معادلة (ABC)، علما أنها ليست على استقامة واحدة.

$A \in (ABC)$ أي $2(3)+2(0)-(-1)-7=6+1-7=0$

$B \in (ABC)$ أي $2(2)+2(1)-(-1)-7=4+2+1-7=0$

$C \in (ABC)$ أي $2(4)+2(2)-5-7=8+4-5-7=0$.

• المسافة بين النقطة D والمستوي (ABC) تعطى بالعلاقة: $\frac{|2x_D+2y_D-z_D-7|}{\sqrt{4+4+1}}=\frac{4}{3}$

هذه المسافة تمثّل طول الارتفاع h النازل من الرأس D على القاعدة (ABC) في رباعي الوجوه $ABCD$.

إذاً: حجم رباعي الوجوه $ABCD$ يعطى بالعلاقة: $V_{ABCD}=\frac{1}{3}sh=\frac{1}{3}\times\frac{9}{2}\times\frac{4}{3}=2\,(u.v)$.

حيث: $s=S_{ABC}$ و $h=\frac{4}{3}$

$(u.a)$ يرمز إلى وحدة المساحة و $(u.v)$ يرمز إلى وحدة الحجم.

المسافة بين نقطة ومستقيم

$(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ معلم متعامد ومتجانس للفضاء. $A(1;2;0)$ ، $B(2;3;-2)$ $C(0;2;4)$ ثلاث نقط من هذا الفضاء. • عيّن تمثيل وسيطي للمستقيم (AB) . • عيّن النقطة M من المستقيم (AB) بحيث تكون المسافة MC أصغر ما يمكن.	4

الحل: لدينا $\overrightarrow{AB}(1;1;-2)$ شعاع توجيه للمستقيم (AB)

$M(x;y;z)\in(AB)$ يكافئ $\overrightarrow{AM}=k\overrightarrow{AB}$

يكافئ $k\in\mathbb{R}\ /\ \begin{pmatrix}x-1\\y-2\\z\end{pmatrix}=k\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}$

أي: $k\in\mathbb{R}\ /\ \begin{cases}x=k+1\\y=k+2\\z=-2k\end{cases}$ يدعى التمثيل الوسيطي للمستقيم (AB) .

• $M(x;y;z)$ نقطة من المستقيم (AB) معناه $M(k+1;k+2;-2k)$

وبالتالي: $MC^2=(k+1)^2+(k+2-2)^2+(-2k-4)^2$ أي

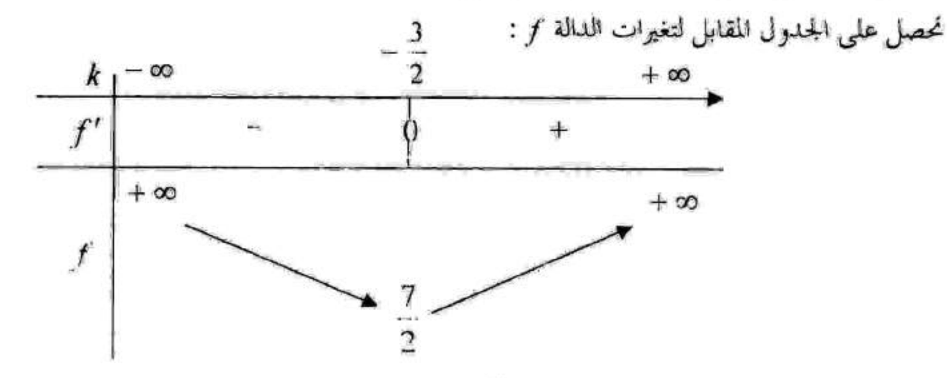
$MC^2=6k^2+18k+17$

أصغر قيمة ممكنة للمسافة MC ، هي القيمة الحدّية الصغرى للدالة

$f:k\mapsto 6k^2+18k+17$

بعد دراسة مختصرة لتغيرات الدالة كثير الحدود من الدرجة الثانية

نحصل على الجدول المقابل لتغيرات الدالة f :



أصغر قيمة للدالة f هي $\frac{7}{2}$ تأخذها من أجل $k=-\frac{3}{2}$. هذا يعني أن أصغر قيمة للعدد MC^2 هي : $\frac{7}{2}$. إذاً: أصغر قيم للمسافة MC هي: $\sqrt{\frac{7}{2}}$.

المسافة بين نقطة ومستو

$(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ معلم متعامد ومتجانس للفضاء. $A(1;2;-1)$ نقطة من هذا الفضاء. نعتبر المستويين P و P' حيث: $(P):2x-y+2z-5=0$ و $(P'):2x+2y-z-4=0$. • بيّن أن المستويين P و P' متعامدان. • أحسب المسافة بين النقطة A وكل من المستويين P و P' . • استنتج المسافة بين النقطة A والمستقيم Δ الناتج من تقاطع المستويين P و P' .	5

الحل: $\vec{n}(2;-1;2)$ شعاع ناظم على المستوي P وَ $\vec{n}'(2;2;-1)$ شعاع ناظم على المستوي P'.

ولدينا: $\vec{n}\cdot\vec{n}' = 2\times 2 + 2(-1) + (-1)2 = 0$ معناه $\vec{n}\perp\vec{n}'$ وبالتالي المستويين P وَ P' متعامدين.

المسافة بين النقطة A والمستوي P تعطى بالعبارة: $\frac{|2(1)-(2)+2(-1)-5|}{\sqrt{4+1+4}} = \frac{7}{3}$.

المسافة بين النقطة A والمستوي P' تعطى بالعبارة: $\frac{|2(1)+2(2)-(-1)-4|}{\sqrt{4+4+1}} = 1$.

لتكن I المسقط العمودي للنقطة A على المستوي P. أي $AI=\frac{7}{3}$ وَ I' المسقط العمودي للنقطة A على المستوي P'.

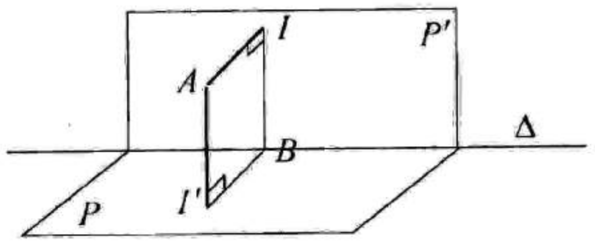
أي $AI'=1$. نسمي B المسقط العمودي للنقطة A على المستقيم Δ.

لدينا الرباعي $AIBI'$ مستطيل، ذلك لأن $(BI)\perp(BI')$ ؛ $(AI)\perp(BI)$ وَ $(BI')\perp(BI$ (من المعطيات)

: المثلث AIB قائم في I. حسب فيثاغورث *Pythagore* لدينا:

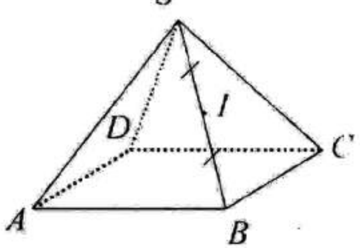
$$AB^2 = AI^2 + IB^2 = \left(\frac{7}{3}\right)^2 + 1 = \frac{58}{9}$$

$AB = \frac{\sqrt{58}}{3}$ وهي المسافة بين النقطة A والمستقيم Δ.



تمارين للتدريب

1. $S.ABCD$ هرم، قاعدته مربّعة ورأسه S وَ أحرفه متقايسة وقيسها a.
I منتصف الحرف $[SB]$.



- احسب بدلالة a الجداءات السلمية التالية:
$\overrightarrow{SA}\cdot\overrightarrow{SB}$ ، $\overrightarrow{SA}\cdot\overrightarrow{SC}$ ، $\overrightarrow{SA}\cdot\overrightarrow{BC}$
$\overrightarrow{SA}\cdot\overrightarrow{AC}$ ، $\overrightarrow{SB}\cdot\overrightarrow{AC}$ ، $\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{AC}$.
- عيّن قيسا للزاوية $I\hat{A}C$.

2. $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ معلم متعامد ومتجانس للفضاء. $A(2;-3;4)$ ، $B(1;0;2)$ ، $C(2;-1;2)$
وَ $D(1;-1;3)$ أربع نقط من هذا الفضاء.
بيّن أن النقط الأربعة A ، B ، C وَ D من نفس المستوي بطريقتين:
- بالتعبير عن الشعاع $\overrightarrow{AD}$ بدلالة الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ وَ $\overrightarrow{AC}$.
- بالبرهان أن النقطة D تنتمي إلى المستوي (ABC) .

3. $ABCDEFGH$ مكعّب. بيّن أن المستويين (BDE) وَ (CFH) متوازيين وذلك بطريقتين مختلفتين:
- بطريقة هندسية.
- باستعمال المعلم $(A;\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AE})$ ومعادلات المستويات.

4. $ABCDEFGH$ مكعّب. P مركز ثقل المثلث BEG .
باستعمال المعلم $(E;\overrightarrow{EF};\overrightarrow{EH};\overrightarrow{EA})$. تعرّف على إحداثيات النقط E ، F ، B ، D ، G وَ P ، ثـم بيّن أن النقط D ، F وَ P على استقامة واحدة.

5. $ABCDEFGH$ مكعّب قياس حرفه 1. الهدف في هذا التمرين هو البرهان على أن $(AG)\perp(BDE)$ بثلاث طرق مختلفة.

(1) بيّن أن النقطتين A وَ G تنتميان إلى المستوي المحوري للقطعة $[BE]$ وكذلك إلى المستوي المحوري للقطعة $[BD]$. استنتج.

(2) بيّن أن: $\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{BD}=0$ وأن: $\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{BE}=0$. أستنتج أن $(AG)\perp(BDE)$.

(3) استعمل المعلم المتعامد والمتجانس $(A;\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AE})$.

6. $ABCDEFGH$ مكعّب. نعتبر المعلم المباشر للفضاء $(A;\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AE})$.

يرمز I إلى منتصف القطعة المستقيمة $[EF]$، وَ J مركز المربّع $ADHE$.

- احسب مساحة المثلث IGA. احسب حجم رباعي الوجوه $ABIG$، واستنتج البعد بين النقطة B والمستوي (AIG).
- عيّن إحداثيات K نقطة تقاطع المستقيم (BJ) مع المستوي (AIG).
- اعد إذاً حساب المسافة بين النقطة B والمستوي (AIG).

7. $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ معلم متعامد ومتجانس للفضاء.

$A(-1;2;0)$، $B(-3;4;2)$، $C(1;-2;-1)$ ثلاث نقط من هذا الفضاء.

- بيّن أن الشعاعان $\overrightarrow{AB}$ وَ $\overrightarrow{AC}$ غير مرتبطين خطياً.
- بيّن أن الشعاع $\vec{n}(a;b;c)$ يكون ناظم على المستوي (ABC) **إذا وفقط إذا** كان $\begin{cases}-a+b+c=0\\ 2a-4b-c=0\end{cases}$.
- استنتج مما سبق إحداثيات صحيحة نسبية للشعاع الناظم $\vec{n}$ على المستوي (ABC) ومعادلة ديكارتية للمستوي (ABC).

8. $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ معلم متعامد ومتجانس للفضاء. (P) المستوي الذي يشمل النقطة $A(1;-2;1)$ والشعاع $\vec{n}(-2;1;5)$ ناظم عليه.

(P') المستوي الذي معادلته الديكارتية هي: $x+2y-7=0$.

- بيّن أن المستويان (P) وَ (P') متعامدان.
- بيّن أن المستويان (P) وَ (P') يتقاطعان وفق المستقيم (Δ) الذي يشمل النقطة

$C(-1;4;-1)$ وشعاع توجيهه $\vec{d}(2;-1;1)$.

- احسب المسافة بين النقطة $B(5;-2;-1)$ وكلا من المستويين (P) وَ (P')، ثـم عيّن المسافة بين النقطة B والمستقيم (Δ).

9. $ABCDEFGH$ مكعّب. نرمز بـ I وَ I' لمركزي الوجهين $ADHE$ وَ $BCGF$ على الترتيب.

- N وَ P نقطتان من القطعتين $[HF]$ وَ $[AC]$ على الترتيب المعرّفتان بـ: $\overrightarrow{HN}=k\overrightarrow{HF}$ وَ $\overrightarrow{AP}=k\overrightarrow{AC}$ حيث: $k\in[0;1]$.
- بيّن أن النقطة N هي مرجّح الجملة المثقلة $\{(H;1-k);(F,k)\}$ وأن النقطة P هي مرجّح الجملة المثقلة $\{(A;1-k);(C,k)\}$.
- نعتبر النقطة J منتصف القطعة $[NP]$، بيّن أن: $\overrightarrow{HN}+\overrightarrow{AP}=2\overrightarrow{IJ}$ وَ $\overrightarrow{HF}+\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{II'}$.
- استنتج أن: $\overrightarrow{IJ}=k\overrightarrow{II'}$ / $k\in[0;1]$.
- ما هي مجموعة النقط J عندما يتغيّر k في المجال $[0;1]$؟

10. $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ معلم متعامد ومتجانس للفضاء. عيّن تقاطع سطح الكرة (Γ) الذي مركزه $\Omega(1;-1;1)$ ونصف قطره 3 مع المستوي (xOy).

10- المقاطع المستوية للسطوح

ما يجب أن يعرف:

★ مقطع سطح بمستو مواز لأحد مستويات الإحداثيات

◆ حالة الاسطوانة الدورانية

$(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ معلم متعامد ومتجانس للفضاء.

(Γ) اسطوانة دورانية محورها (Oz) ونصف قطرها r.

- مقطع (Γ) بالمستوي الذي معادلته $z = a$ / $a \in R$ هي الدائرة C'_a مركزها $\Omega(0;0;a)$ ونصف قطرها r.
- مقطع (Γ) بالمستوي الذي معادلته $x = a$ أو $y = a$ / $a \in R$ هي مستقيم، إتحاد مستقيمين أو مجموعة خالية.

للحفظ

إذا كان (C) مقطع الاسطوانة الدورانية (Γ) بالمستوي العمودي على محورها فإن (Γ) هو:

- اتحاد الدوائر صور (C) بالانسحاب الذي شعاعه $\lambda\vec{k}$ حيث λ يمسح مجموعة الأعداد الحقيقية باستثناء الصفر.
- اتحاد المستقيمات الموازية للمستقيم (Oz) والتي تقطع (C).

◆ حالة المخروط الدوراني

$(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ معلم متعامد ومتجانس للفضاء. (Γ') مخروط دوراني غير محدود محوره (Oz) ومركزه O.

- مقطع (Γ') بالمستوي الذي معادلته $z = a$ / $a \in R$ هو الدائرة C'_a التي مركزها $\Omega(0;0;a)$.

- مقطع (Γ') بالمستوي الذي معادلته $x = a$ أو $y = a$ / $a \in R$ هو إتحاد مستقيمين أو قطع زائد.

للحفظ

إذا كان (C) مقطع المخروط الدوراني غير المحدود (Γ') بالمستوي العمودي على محوره والذي لا يشمل O فإن (Γ') هو:

- اتحاد الدوائر صور (C) بالتحاكيات التي مركزها O ونسبتها λ حيث λ يمسح مجموعة الأعداد الحقيقية ماعدا 0.
- اتحاد المستقيمات التي تشمل المبدأ O ونقطة من (C).

★ الدوال ذات متغيّرين

◆ السطوح

تعريف

$(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ معلم متعامد ومتجانس للفضاء.

f الدالة العددية للمتغيرين x و y معرّفة على المجال I بالنسبة للمتغيّر x وعلى المجال J بالنسبة للمتغيّر y.

مجموعة النقط $M(x;y;z)$ حيث: $x \in I$ و $y \in J$ و $z = f(x;y)$ تدعى سطح Σ من الفضاء يمثّل الدالة f، و $z = f(x;y)$ هي معادلة ديكارتية للسطح Σ.

مقطع السطح Σ بالمستوي الذي معادلته $z = \lambda$ حيث: $\lambda \in R$ يدعى منحنى الدالة f من المستوى λ.

◆ أسطح خاصة

- السطح الذي معادلته $z = x^2 + y^2$ يدعى **مجسم مكافئ دوراني** *Paraboloide*.

منحنياته من المستوى هي دوائر.

مقطعه بالمستويات الموازية لأحد المستويين (xOz) أو (yOz) هو قطع مكافئ.

إذا كان (P) القطع المكافئ الذي معادلته $z = x^2$ في المستوي المزوّد بالمعلم $(O;\vec{i};\vec{k})$، فإننا نحصل على المجسم المكافئ الدوراني، بدوران (P) حول المحور (Oz).

• السطح الذي معادلته $z = xy$ يدعى **مجسم زائدي دوراني** *hyperboloi de* .

منحنياته من المستوى هي قطوع زائدة معادلتها $xy = k$ حيث k عدد حقيقي غير معدوم.

في حالة $k = 0$ نحصل على اتحاد المحورين (Ox) و (Oy).

تمــارين محــلولة

السطوح

1

Σ سطح معادلته $z = x^2 - 2x + y^2 - 2$.

اكتب معادلة Σ بالشكل: $z = (x - a)^2 + y^2 + b$

حيث a و b عددان حقيقيان يطلب تعينهما.

استنتج أن Σ محتواة في نصف الفضاء المعرّف بـ: $z \geq -3$.

الحل: لدينا $z = x^2 - 2x + y^2 - 2$ تكافئ $z = x^2 - 2x + 1 - 1 + y^2 - 2$

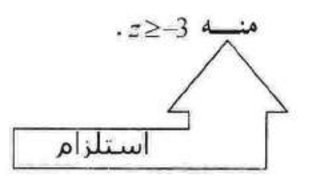
تكافئ $z = (x-1)^2 + y^2 - 3$

إذاً: $a = 1$ و $b = -3$.

من أجل كل x و y من R، $(x-1)^2 + y^2 \geq 0$ وبالتالي $z \geq -3$

من أجل كل نقطة $M(x;y;z)$ من الفضاء، $M(x;y;z) \in \Sigma$ معناه $z = (x-1)^2 + y^2 - 3$

منــه $z \geq -3$.



أي Σ محتواة في نصف الفضاء المعرّف

بـ: x و y من R و $z \geq -3$.

الأسطوانة الدورانية – المخروط الدورانى – سطح الكرة

2

$(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ معلم متعامد ومتجانس للفضاء. $A(1;1;\sqrt{6})$ ، $B(1;2;3)$ و $C(0;0;1)$ ثلاث نقط من هذا الفضاء.

• أعط معادلة المخروط الدوراني Γ الذي محوره (Oz) ورأسه O ويشمل النقطة A . أحسب θ زاويته عند الرأس.

• أعط معادلة الأسطوانة الدورانية Ψ التي محورها (Oz) وتشمل النقطة B .

• نعتبر سطح الكرة S التي مركزها C ونصف قطرها 3 .عيّن طبيعة المجموعة $\Psi \cap S$ واعط معادلة ديكارتية لها.

الحل: للمخروط الدوراني Γ معادلة من الشكل: $x^2 + y^2 - \alpha^2 z^2 = 0$

بما أن $A \in \Gamma$ فإن: $1^2 + 1^2 - \alpha^2 \sqrt{6}^2 = 0$ أي $\alpha^2 = \frac{1}{3}$ وبالتالي: $\Gamma: x^2 + y^2 - \frac{1}{3} z^2 = 0$

نضع: $H(0;0;\sqrt{6})$ المسقط العمودي للنقطة A على المحور (Oz) .

ينتج أن المثلث OHA قائم في H . إذاً: $\tan\theta = \frac{AH}{OH} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ منه $\theta = \frac{\pi}{6}$.

للأسطوانة الدورانية Ψ معادلة من الشكل: $x^2 + y^2 = r^2$

بما أن $B \in \Psi$ فإن: $1^2 + 2^2 = r^2$ أي $r^2 = 5$ وبالتالي: $\Psi : x^2 + y^2 = 5$.

معادلة سطح الكرة S هي: $x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 9$.

$M(x;y;z) \in \Psi \cap S$ معناه $\begin{cases} x^2+y^2=5 \\ x^2+y^2+(z-1)^2=9 \end{cases}$ يكافئ $\begin{cases} x^2+y^2=5 \\ z=-1 \end{cases}$ أو $\begin{cases} x^2+y^2=5 \\ z=3 \end{cases}$

هي إتحاد الدائرتين (C) و (C')،

(C) مركزها $\omega(0;0;-1)$ ونصف قطرها $\sqrt{5}$ وتقع في المستوي الذي معادلته $z=-1$.

(C') مركزها $\omega'(0;0;3)$ ونصف قطرها $\sqrt{5}$ وتقع في المستوي الذي معادلته $z=3$.

الدالة ذات متغيرين

3

$(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ معلم متعامد ومتجانس للفضاء. $A(1;-1;0)$ ، $B(2;0;4)$ نقطتان من هذا الفضاء. نعتبر السطح (Γ) الذي معادلته $z = x^2 - y^2$.

بيّن أن المستقيم (AB) محتوى في السطح (Γ) .

الحل: لدينا: من أجل كل نقطة $M(x;y;z)$ من الفضاء، $M(x;y;z)\in(AB)$

معناه $\overrightarrow{AM}=k.\overrightarrow{AB}$ أي: $\begin{pmatrix}x-1\\y+1\\z\end{pmatrix}=k\begin{pmatrix}1\\1\\4\end{pmatrix}$

وبالتالي: $\begin{cases}x=k+1\\y=k-1\\z=4k\end{cases}$ / $k\in\mathbb{R}$ هو تمثيل ديكارتي للمستقيم (AB).

هل إحداثيات نقطة M من المستقيم (AB) تحقق معادلة (Γ)؟

$(k+1)^2-(k-1)^2=k^2+2k+1-k^2+2k-1=4k=z$ وبالتالي (AB) محتوى في السطح (Γ).

الدالة ذات متغيرين

4	$(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ معلم متعامد ومتجانس للفضاء. نعتبر السطح (Γ) الذي معادلته $z=2e^{-(x^2+y^2)}$. • بيّن أن السطح (Γ) محصور بين المستويين الذين معادلتهما $z=0$ و $z=2$. • بيّن أن السطح (Γ) يقبل ذروة عظمى وحيدة يطلب تعيينها.

الحل: من أجل كل نقطة $M(x;y;z)$ من الفضاء، $M(x;y;z)\in(\Gamma)$

معناه $z=2e^{-(x^2+y^2)}$.

لدينا: من أجل كل x و y من $\mathbb{R}$، $x^2+y^2\geq 0$ وبالتالي $-(x^2+y^2)\leq 0$

أي $e^{-(x^2+y^2)}\leq e^0$ يعني أن $0<z\leq 2$ كون العدد الأسي e^X موجب تماما.

إذاً: (Γ) محصور بين المستويين الذين معادلتهما $z=0$ و $z=2$. (دون أن يقطع المستوي $z=0$)

لدينا النقطة $M_0(0;0;2)$ تنتمي إلى السطح (Γ)، ومن الحصر السابق، كل نقطة من (Γ) تحقق $z\leq 2$ فإن $M_0(0;0;2)$ ذروة عظمى للسطح (Γ). هل هي وحيدة؟

نبحث عن x و y من $\mathbb{R}$ علماً أن $z=2$.

$2=2e^{-(x^2+y^2)}$ يكافئ $-(x^2+y^2)=0$ يكافئ $x=0$ و $y=0$

إذاً: النقطة $M_0(0;0;2)$ ذروة عظمى وحيدة للسطح (Γ).

دراسة سطح معادلته من الشكل $z=f(x;y)$

5	$(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ معلم متعامد ومتجانس للفضاء. نعتبر السطح (Γ) الذي معادلته $z=\frac{1}{2}(x^2+y^2)$. • عيّن تقاطع السطح (Γ) مع كل من المستويين: $(P):x=0$ و $(P'):y=2$. • ناقش حسب قيم الوسيط الحقيقي k، مجموعة تقاطع (Γ) مع المستوي $(P_k):z=k$.

الحل : من أجل كل نقطة $M(x;y;z)$ من الفضاء،

$M(x;y;z)\in(\Gamma)\cap(P)$ معناه $\begin{cases}z=\frac{1}{2}(x^2+y^2)\\x=0\end{cases}$ يكافئ $\begin{cases}z=\frac{1}{2}y^2\\x=0\end{cases}$ هي قطع مكافئ

معادلته $z=\frac{1}{2}y^2$ في المستوي (P).

$M(x;y;z)\in(\Gamma)\cap(P')$ معناه $\begin{cases}z=\frac{1}{2}(x^2+y^2)\\y=2\end{cases}$ يكافئ $\begin{cases}z=\frac{1}{2}x^2+2\\y=2\end{cases}$ هي قطع مكافئ

معادلته $z=\frac{1}{2}x^2+2$ في المستوي (P').

$M(x;y;z)\in(\Gamma)\cap(P_k)$ معناه $\begin{cases}z=\frac{1}{2}(x^2+y^2)\\z=k\end{cases}$ يكافئ $\begin{cases}x^2+y^2=2k\\z=k\end{cases}$

نناقش ثلاثة حالات ($k<0$ ، $k=0$ ، $k>0$)

في حالة $k<0$. الكتابة $x^2+y^2=2k$ مستحيلة (مجموع مربعين هو عدد موجب)

إذاً: $(\Gamma)\cap(P_k)=\phi$.

في حالة $k=0$. $\begin{cases}x^2+y^2=0\\z=k\end{cases}$ تكافئ $x=0$ و $y=0$ و $z=0$ إذاً: $(\Gamma)\cap(P_k)=\{O\}$.

في حالة $k>0$. الجملة $\begin{cases} x^2+y^2=2k \\ z=k \end{cases}$ تعيّن دائرة. إذاً: $(\Gamma)\cap(P_k)$ الدائرة التي مركزها $\Omega(0;0;k)$ ونصف قطرها $\sqrt{2k}$ وتقع في المستوي الذي معادلته $z=k$.

تمارين للتدريب

1. $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ معلم متعامد ومتجانس للفضاء. (Σ) الاسطوانة الدورانية التي محورها (Oz) وتشمل النقطة $A(1;2;3)$.

عيّن معادلة ديكارتية للاسطوانة (Σ)، ثم عيّن مقطع (Σ) بكل من المستويات التي معادلاتها: $x=2$، $y=-3$ وَ $z=-4$.

2. $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ معلم متعامد ومتجانس للفضاء. (Σ) المخروط الدوراني الذي محوره (Oz) ورأسه O ويشمل النقطة $A(1;2;3)$.

عيّن معادلة ديكارتية للمخروط (Σ)، ثم عيّن مقطع (Σ) بكل من المستويات التي معادلاتها: $z=-2$، $z=1$ وَ $x=y$.

3. $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ معلم متعامد ومتجانس للفضاء. (Γ) المخروط الدوراني الذي محوره (Oz) ورأسه O وزاويته $\frac{\pi}{3}$.

تحقق أن النقطة $A(1;\sqrt{2};1)$ تنتمي إلى (Γ)، ثم أعط معادلة للمخروط (Γ).

لتكن (Σ) سطح الكرة التي مركزها $\Omega(0;0;1)$ ونصف قطرها 1،

عيّن المجموعة $(\Gamma)\cap(\Sigma)$.

4. $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ معلم متعامد ومتجانس للفضاء. (D) المستقيم الذي يشمل المبدأ O وشعاع توجيهه $\vec{u}=2\vec{i}-\vec{k}$

(Γ) المخروط الدوراني الذي رأسه O ومحوره (Oz) ويشمل المستقيم (D).

- أعط معادلة للمخروط الدوراني (Γ).
- عيّن قيمة العدد الحقيقي الموجب تماماً a بحيث يكون مقطع المخروط (Γ) بالمستوي ذي المعادلة $z=a$ هو دائرة نصف قطرها 2 يطلب تعيين مركزها.

5. $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ معلم متعامد ومتجانس للفضاء.

نعتبر السطح (Γ) الذي معادلته $z=f(x;y)$.

من أجل كل عدد حقيقي k، المنحني ذي المستوى k للدالة f هو المستقيم الذي يشمل النقطة $A(-k;k+1;k)$ وشعاع توجيهه $\vec{u}=\vec{i}-2\vec{j}$. تعرّف على السطح (Γ) والدالة f.

6. $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ معلم متعامد ومتجانس للفضاء. نعتبر السطح (Γ) ذي المعادلة $x^2+y^2=z^2+1$.

- ما هي النقط من (Γ) الأقرب إلى المحور (Oz)؟
- A نقطة كيفية من (Γ)، كم عدد المستقيمات التي تشمل A ومحتواة في السطح (Γ)؟

7. $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ معلم متعامد ومتجانس للفضاء. نعتبر السطح (Γ) الذي معادلته $z=x^2-y^2$.

(P)، (P') وَ (P'') ثلاثة مستويات معادلاتها $x=2$، $y=3$ وَ $z=-2$ على الترتيب.

- عيّن مقطع السطح (Γ) بكل من المستويين (P) وَ (P').
- نعتبر المعلم للفضاء $(O;\vec{u};\vec{v};\vec{k})$ حيث: $\vec{u}=\frac{\sqrt{2}}{2}(\vec{i}-\vec{j})$ وَ $\vec{v}=\frac{\sqrt{2}}{2}(\vec{i}+\vec{j})$.

ونضع: $(x;y;z)$ وَ $(X;Y;Z)$ إحداثيات النقطة M في المعلمين $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ وَ $(O;\vec{u};\vec{v};\vec{k})$ على الترتيب.

أعط معادلة ديكارتية للسطح (Γ) في المعلم $(O;\vec{u};\vec{v};\vec{k})$، ثم استنتج مقطع السطح (Γ) بالمستوي (P'').

8. $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ معلم متعامد ومتجانس للفضاء. f الدالة العددية للمتغيرين x وَ y من R معرّفة بالدستور: $f(x;y)=x^2-2x+y^2+y-1$. وَ (Γ) السطح الذي معادلته $z=f(x;y)$.

- اكتب $f(x;y)$ بالشكل: $(x-a)^2+(y-b)^2+c$ حيث a، b وَ c أعداد حقيقية يطلب تعيينها.
- بيّن أن الدالة f تقبل قيم حدية صغرى يطلب تعيينها.
- عيّن مقطع السطح (Γ) بكل من المستويين: $(P): x=1$ وَ $(P'): z=-1$.

• عيّن تقاطع السطح (Γ) مع سطح الكرة التي مركزها $\Omega\left(1;-\frac{1}{2};-\frac{9}{4}\right)$

ونصف قطرها 1.

9. $\left(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$ معلم متعامد ومتجانس للفضاء. نعتبر السطح (Γ) الذي معادلته

$z=\dfrac{2}{x^2+y^2+1}$.

• بيّن أن السطح (Γ) محصور بين المستويين اللذين معادلتهما $z=0$ و $z=2$.

• نعتبر المستوي (P_k) الذي معادلته $z=k$.

• عيّن تقاطع السطح (Γ) مع المستوي (P_1).

• ناقش حسب قيم العدد الحقيقي k مقطع السطح (Γ) بالمستوي (P_k).

• ارسم المساقط العمودية لمقاطع السطح (Γ) مع كل من المستويات $(P_{0.5})$، (P_1)، $(P_{1.5})$ و (P_2) على المستوي المزود بالمعلم $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$.

10. $\left(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$ معلم متعامد ومتجانس للفضاء. نعتبر السطح (Γ) الذي معادلته $z=\sqrt{x^2+y^2+1}$.

من أجل كل عدد حقيقي k، نضع: $(P_k):z=k$ و $(\Pi_k):x=k$.

• بيّن أن السطح (Γ) يقبل ذروة صغرى $A(0;0;1)$.

• ناقش حسب قيم العدد الحقيقي k مقطع السطح (Γ) بالمستوي (P_k).

• نضع: $\vec{u}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\left(\vec{j}+\vec{k}\right)$، $\vec{v}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\left(\vec{k}-\vec{j}\right)$ و I_k النقطة ذات الإحداثيات $(k;0;0)$.

تأكد من أن $(I_k;\vec{u};\vec{v})$ معلم متعامد ومتجانس.

باستعمال المعلم $(I_k;\vec{u};\vec{v})$ عيّن مقطع السطح (Γ) بالمستوي (Π_k).

أخي / أختي

إن إستفدت من هذا الملف فالرجاء أن تدع لي و للمؤلف بالخير

و النجاح و المغفرة ☺

Hard_equation

الفصـــــل الثـــاني

مواضيع امتحانات البكالوريا

لـــدول أجنبيـــة

(مع حلولها)

الموضوع الأول

بكالوريا علوم تجريبية ---- سبتمبر 2005 ---- فرنسا

التمرين1 (7نقط)

الجزء A .

الدالة f معرّفة على المجال $[0;+\infty[$ بالدستور: $f(x)=(20x+10)e^{-\frac{1}{2}x}$.

يرمز (C_f) للتمثيل البياني للدالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

(وحدة الرسم $1cm$).

1. ادرس نهاية الدالة f عند $+\infty$.
2. ادرس اتجاه تغيّر الدالة f وارسم جدول تغيراتها.
3. بيّن أن المعادلة $f(x)=10$ تقبل حلا واحداً α في المجال $]0;+\infty[$. أعط قيمة عشرية مقرّبة إلى 10^{-3} للعدد α .
4. أرسم المنحنى (C_f).
5. أحسب التكامل $I=\int_0^3 f(x)dx$.

الجزء B .

نرمز بـ $y(t)$ للقيمة العددية لدرجة حرارة تفاعل كيميائي معيّن في اللحظة t . (وحدة الدرجة هي C° ووحدة الزمن t هي الساعة h). القيمة الابتدائية في اللحظة $t=0$، هي $y(0)=10$.

نقبل أن الدالة التي ترفق بكل عدد حقيقي t من المجال $[0;+\infty[$ القيمة $y(t)$ هي حلا للمعادلة التفاضلية $(E): y'+\frac{1}{2}y=20e^{-\frac{1}{2}t}$.

1. تحقق أن الدالة f التي درست في الجزء A هي حلا للمعادلة (E) في المجال $[0;+\infty[$.
2. نريد البرهان على أن الدالة f هي الحل الوحيد للمعادلة (E) في المجال $[0;+\infty[$ والتي تأخذ القيمة 10 عند اللحظة 0 .

أ. g ترمز إلى أحد حلول المعادلة (E) في المجال $[0;+\infty[$ والتي تحقق $g(0)=10$.

بيّن أن الدالة $f-g$ هي حلا في المجال $[0;+\infty[$ للمعادلة التفاضلية $(E'): y'+\frac{1}{2}y=0$.

ب. حل المعادلة التفاضلية (E') .

ج. استنتج.

3. في حدود أي زمن تنزل درجة حرارة التفاعل الكيميائي إلى قيمتها الابتدائية؟ يطلب تدوير النتيجة إلى الدقيقة.
4. القيمة θ مقدّرة بوحدة الدرجة تمثّل درجة الحرارة المتوسطة لهذا التفاعل الكيميائي في الساعات الثلاث الأولى وهي القيمة المتوسطة للدالة f على المجال $[0;3]$.

أحسب القيمة المظبوطة للعدد θ، ثم أعط القيمة العشرية للعدد θ مدورة إلى الوحدة C° .

التمرين 2 (5نقط)

من أجل كل سؤال هناك جواب واحد صحيح من بين الأجوبة المقترحة، يعيّن المترشح على ورقة الأجوبة، رقم السؤال والحرف المقابل للجواب المختار.

كل اجابة صحيحة تساوي 1 نقطة، وكل اجابة خاطئة تساوي 0.5 − نقطة وعدم الأجابة تعادل 0 نقطة. إذا كان المجموع في التمرين سالبا،فالمترشح يحصل على 0 في التمرين.

لا يطلب أي تعليل.

1. z عدد مركّب طويلته $\sqrt{2}$ والعدد $\frac{\pi}{3}$ عمدة له، لدينا:

(A): $z^{14}=-128\sqrt{3}-128i$. (C): $z^{14}=-64+64i\sqrt{3}$.

(B): $z^{14}=64-64i$. (D): $z^{14}=-128-128i\sqrt{3}$.

2. في المستوي المركّب المزوّد بالمعلم المتعامد والمتجانس، نعتبر النقطة S ذات اللاحقة 3 و النقطة T ذات اللاحقة $4i$.

(E) مجموعة النقط M من هذا المستوي والتي لاحقتها z تحقق: $|z-3|=|3-4i|$.

(A): (E) هي محور القطعة $[ST]$. (B): (E) هي المستقيم (ST) .

(C): (E) هي الدائرة التي مركزها Ω ذات اللاحقة $(3-4i)$ ونصف قطرها 3 .

(D): (E) هي الدائرة التي مركزها S ونصف قطرها 5 .

3. نعتبر $ABCDEF$ سداسي أضلاع منتظم طول ضلعه 1. الجداء السلمي $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{CF}$ يساوي:

(A): $\sqrt{3}$.　　(C): $-\sqrt{3}$.

(B): -3.　　(D): $\frac{3}{2}$.

4. g الدالة المعرّفة على المجال $]-\infty;0]$ بالدستور: $g(x)=\frac{\sqrt{x^2-2x}}{x-3}$ و (C_g) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم.

(A): (C_g) يقبل مستقيم مقارب معادلته $y=-1$.

(B): (C_g) لا يقبل مستقيمات مقاربة.

(C): (C_g) يقبل مستقيم مقارب معادلته $y=x$.

(D): (C_g) يقبل مستقيم مقارب معادلته $y=1$.

5. f الدالة المعرّفة على R بالدستور: $f(x)=\int_0^x e^{-t^2}\,dt$. الدالة المشتقة الثانية f'' للدالة f على R معرّفة بـ:

(A): $f''(x)=\int_0^x -2te^{-t^2}\,dt$.　　(C): $f''(x)=-2xe^{-x^2}$.

(B): $f''(x)=\int_0^x -2xe^{-x^2}\,dx$.　　(D): $f''(x)=e^{-x^2}$.

التمرين 3 (5 نقط)

الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$.

1. (P) المستوي الذي يشمل النقطة $B(1;-2;1)$ وشعاعه الناظم $\vec{n}(-2;1;5)$، و (P') المستوي الذي معادلته $x+2y-7=0$.

أ. بيّن أن المستويين (P) و (P') متعامدين.

ب. بيّن أن تقاطع المستويين (P) و (P') هو المستقيم (Δ) الذي يشمل النقطة $C(-1;4;-1)$ وشعاع توجيهه $\vec{u}(2;-1;1)$.

ج. نعتبر النقطة $A(5;-2;-1)$. أحسب المسافة بين النقطة A والمستوي (P)، ثم بين النقطة A والمستوي (P')،

د. عيّن المسافة بين النقطة A والمستقيم (Δ).

2. نعتبر النقطة M_t ذات الاحداثيات $(1+2t;3-t;t)$ حيث t عدد حقيقي.

أ. أعط عبارة الطول AM_t بدلالة t. ونرمز لهذا الطول بـ $\varphi(t)$ حيث φ دالة من R نحو R.

ب. ادرس اتجاه تغيّر الدالة φ على R، وحدّد قيمتها الصغرى.

ج. فسّر هندسيا هذه القيمة الصغرى.

التمرين 4 (5 نقط)

الجزء A.

زهرة نرد على شكل رباعي وجوه منتظم، لها وجه أزرق ووجهان حمراوان ووجه أخضر، نفرض أن الزهرة متوازنة تماماً.

جولة للّعب تتمثّل في اجراء رميتين متتاليتين ومستقلتين لهذا النرد، في كل رمية نسجّل لون وجه القاعدة(الوجه الذي لا يظهر).

نعتبر الحادثتين التاليتين:

E هي الحادثة: في ختام الجولة يكون الوجهان المسجّلان خضراوين.

F هي الحادثة: في ختام الجولة يكون الوجهان المسجّلان من نفس اللون.

1. احسب احتمال الحادثتين E و F، ثم احسب احتمال الحادثة E علماً F.

2. نجري عشر جولات متشابهة ومستقلّة.

احسب احتمال الحصول مرتين على الأقل على الحادثة F. (تعطى قيمة عشرية مقرّبة إلى 10^{-3}).

تصحيح الموضوع الأول

بكالوريا علوم تجريبية --- سبتمبر 2005 --- فرنسا

التمرين1 (7نقط)

الجزء A.

1. نضع: $X=\frac{x}{2}$ فنكتب $f(x)$ بالشكل:

$$f(x)=\left(40\frac{x}{2}+10\right)e^{-\frac{1}{2}x}=40\frac{X}{e^X}+\frac{10}{e^X}$$

إذاً: $\lim_{x\to+\infty} f(x)=40(0)+10(0)=0^+$ كون $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}=+\infty$ وَ $\frac{1}{+\infty}=0^+$.

2. $f'(x)=(20-10x-5)e^{-\frac{1}{2}x}=5(3-2x)e^{-\frac{1}{2}x}$ نلاحظ أن العدد $f'(x)$ له

إشارة العدد $(3-2x)$ كون $5e^{-\frac{1}{2}x}>0$.

إذاً: f متزايدة تماما على $\left[0;\frac{3}{2}\right]$ ومتناقصة تماما على $\left[\frac{3}{2};+\infty\right[$. جدول التغيرات يعطى كمايلي:

x	0		$\frac{3}{2}$	α	$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0		
$f(x)$	10 ↗		$40e^{-3/4}$	10	↘ 0^+

3. في المجال $\left]0;\frac{3}{2}\right]$. الدالة f مستمرة ومتزايدة تماما ولدينا:

$f\left(\left]0;\frac{3}{2}\right]\right)=\left]10;40e^{-3/4}\right]$ أي المعادلة $f(x)=10$ لاتقبل حلول.

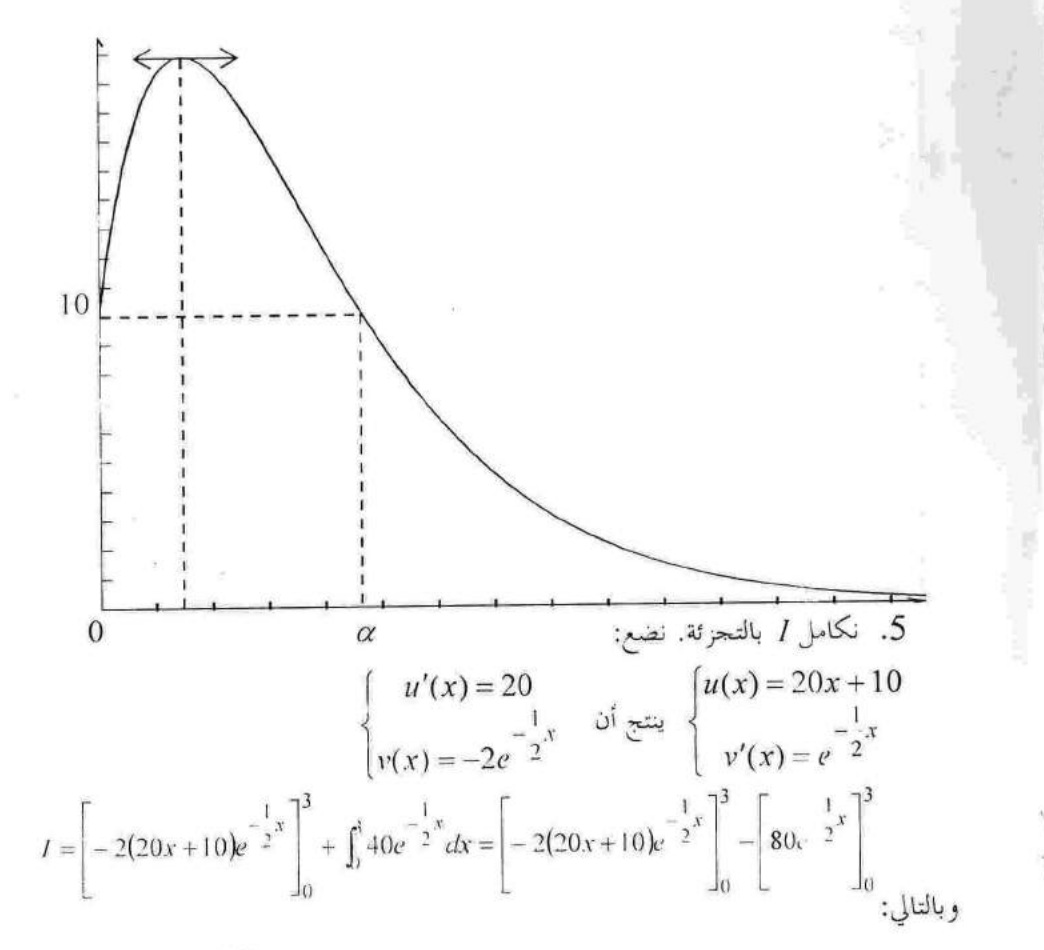
في المجال $\left[\frac{3}{2};+\infty\right[$. الدالة f مستمرة ومتناقصة تماما ولدينا: $f\left(\left[\frac{3}{2};+\infty\right[\right)=\left]0;40e^{-3/4}\right]$

وَ $40e^{-3/4}\approx 18.9$ إذاً: يوجد عدد حقيقي وحيد α في المجال $\left[\frac{3}{2};+\infty\right[$

بحيث $f(\alpha)=10$

أي المعادلة $f(x)=10$ تقبل حلا واحداً α في المجال $]0;+\infty[$. بالحاسبة نجد $\alpha\approx 4.673$.

4. رسم المنحني



5. نكامل I بالتجزئة. نضع:

$$\begin{cases} u(x)=20x+10 \\ v'(x)=e^{-\frac{1}{2}x}\end{cases} \quad \text{ينتج أن} \quad \begin{cases} u'(x)=20 \\ v(x)=-2e^{-\frac{1}{2}x}\end{cases}$$

$$I=\left[-2(20x+10)e^{-\frac{1}{2}x}\right]_0^3+\int_0^3 40e^{-\frac{1}{2}x}dx=\left[-2(20x+10)e^{-\frac{1}{2}x}\right]_0^3-\left[80e^{-\frac{1}{2}x}\right]_0^3$$

وبالتالي:

$$=100-220e^{-3/2}\approx 50.91$$

الجـــزء B.

1. لدينا: من أجل كل t من المجال $[0;+\infty[$،

$$f'(t)+\frac{1}{2}f(t)=20e^{-\frac{1}{2}t}+(-10t-5)e^{-\frac{1}{2}t}+(10t+5)e^{-\frac{1}{2}t}=20e^{-\frac{1}{2}t}$$

يعني أن الدالة f هي حلاً للمعادلة (E) في المجال $[0;+\infty[$.

2. بما أن g حلا للمعادلة (E) هذا يعني أن $g'(t)+\frac{1}{2}g(t)=20e^{-\frac{1}{2}t}$ ولدينا مما سبق:

$$f'(t)+\frac{1}{2}f(t)=20e^{-\frac{1}{2}t}$$

بالطرح طرف من طرف و من أجل كل t من المجال $]0;+\infty[$، نحصل على:

$$g'(t)+\frac{1}{2}g(t)-f'(t)-\frac{1}{2}f(t)=0$$

أي $(g-f)'(t)+\frac{1}{2}(g-f)(t)=0$. نستنتج أن الدالة $(g-f)$ هي حلا في المجال $]0;+\infty[$ للمعادلة التفاضلية $(E'): y'+\frac{1}{2}y=0$.

حلول المعادلة (E') في المجال $]0;+\infty[$ هي الدوال: $\lambda\in R\ /\ t\mapsto \lambda e^{-\frac{1}{2}t}$.

بما أن الدالة $(g-f)$ هي حلا للمعادلة (E') فإن: $(g-f)(0)=\lambda e^{0}$ أي $g(0)-f(0)=\lambda$ و علما أن $g(0)=f(0)=10$ فإن $\lambda=0$.

إذاً: الدالة $(g-f)$ هي الدالة المعدومة. أي من أجل كل t من المجال $]0;+\infty[$، $g(t)=f(t)$.

الاستنتاج: المعادلة التفاضلية (E) تقبل حلا واحداً g في المجال $]0;+\infty[$ يحقق $g(0)=10$ وهو الدالة f.

3. القيمة الابتدائية هي $g(0)=10$. وحسب السؤال 3 من الجزء A، تنزل درجة حرارة التفاعل الكيميائي إلى قيمتها الابتدائية 10 في حدود الزمن α كون $f(\alpha)=10$ ولدينا حسب ماسبق: $\alpha\approx 4.673$ أي $\alpha\approx 4h\,41\min$.

4. $\theta=\frac{1}{3-0}\int_0^3 f(x)dx=\frac{1}{3}\left(100-220e^{-3/2}\right)\approx 17C°$

التمرين 2 (5 نقط)

1. الجواب C، 2. الجواب D، 3. الجواب B، 4. الجواب A، 5. الجواب C.

التمرين 3 (5 نقط)

1. أ) الشعاع الناظم للمستوي (P') هو $\vec{n'}(1;2;0)$ بما أن: $\vec{n}\cdot\vec{n'}=-2+2+0=0$ فإن الشعاعان $\vec{n}$ و $\vec{n'}$ متعامد وبالتالي تعامد المستويين (P) و (P').

ب) نوجد أولا معادلة للمستوي (P). نعلم أنها من الشكل: $-2x+y+5z+d=0$ وبما أن $B\in(P)$ فإن $-2(1)+(-2)+5(1)+d=0$ أي $d=-1$ وبالتالي:

$$(P): -2x+y+5z-1=0$$

احداثيات النقط التي تنتمي إلى المستويين (P) و (P') تحقق الجملة:

$\begin{cases}-2x+y+5z-1=0\\ x+2y-7=0\end{cases}$ وهذه الجملة تكافئ: $\begin{cases}x=2z+1\\ y=-z+3\\ z\in R\end{cases}$

هو تمثيل ديكارتي للمستقيم تقاطع المستويين (P) و (P').

باستبدال z بوسيط t نحصل على جملة مكافئة لها وهي: $\begin{cases}x=2t+1\\ y=-t+3\\ z=t\end{cases}$ تدعى تمثيل وسيطي للمستقيم (Δ)

يظهر جيداً شعاع توجيهه $\vec{u}(2;-1;1)$، ويمكننا التحقق بسهولة أن الاحداثيات $(-1;4;-1)$ تحققها. أي $C\in(\Delta)$.

ج) المسافة بين A والمستوي (P) هي: $\frac{|-10-2-5-1|}{\sqrt{4+1+25}}=\frac{3\sqrt{30}}{5}$ و المسافة بين A والمستوي (P') هي: $\frac{|5-4-7|}{\sqrt{4+1}}=\frac{6\sqrt{5}}{5}$.

د) في المستوي الذي يشمل النقطة A ويعامد المستويين (P) و(P')، وبتطبيق نظرية فيتاغورس نجد:

المسافة بين النقطة A والمستقيم (Δ) تساوي $\sqrt{18}=\sqrt{\left(\frac{3\sqrt{30}}{5}\right)^2+\left(\frac{6\sqrt{5}}{5}\right)^2}$.

2. أ) $AM_t^{\,2}=(-4+2t)^2+(5-t)^2+(t+1)^2=6\left(t^2-4t+7\right)$

وبما أن ثلاثي الحدود $\left(t^2-4t+7\right)$ موجب تماما على R. (كون مميّزه سالب تماما) فإن: $AM_t=\sqrt{6\left(t^2-4t+7\right)}=\varphi(t)$.

ب) الدالة φ معرّفة وقابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ولدينا: $\varphi'(t)=\dfrac{6(t-2)}{\sqrt{6(t^2-4t+7)}}$ له اشارة البسط.

إذاً: الدالة φ متناقصة تماما على $]-\infty;2]$ ومتزايدة تماماً على $[2;+\infty[$. وبالتالي φ تقبل قيمة حدّية صغرى عند 2 وهي: $\varphi(2)=\sqrt{18}$.

واضح أن M_t نقطة كيفية من (Δ) . و الطول AM_t يمثّل البعد بين النقطة A و نقطة كيفية من (Δ) .
أصغر قيمة لهذا البعد هو القيمة الحدية الصغرى للدالة φ وهي $\sqrt{18}$ وتمثّل هندسيا المسافة بين النقطة A والمستقيم (Δ) .

التمرين 4 (3 نقط)

الجزء A .

نضع $(\Omega; p)$ فضاء احتمالي منته.

1. نرسم شجرة الاحتمالات فنحصل على: $p(E)=\dfrac{Card(E)}{Card(\Omega)}=\dfrac{1}{16}$ و

$$p(F)=\frac{Card(F)}{Card(\Omega)}=\frac{1+1+4}{16}=\frac{3}{8}$$

احتمال الحادثة E علماً F هو: $p_F(E)=\dfrac{p(E\cap F)}{P(F)}=\dfrac{\frac{1}{16}}{\frac{6}{16}}=\dfrac{1}{6}$

2. نعتبر تجربة برنولي ذات المخرجين F و $\overline{F}$ وليكن X المتغير العشوائي الذي قيمه هي عدد المرات التي يظهر فيها المخرج F . قانون الاحتمال للمتغيّر X يتبع قانون ثنائي الحد وسيطاه 10 و $\dfrac{3}{8}$.

لدينا:

$$p(X\geq 2)=1-\left[p(X=0)+p(X=1)\right]$$
$$=1-\left[C_{10}^{0}\left(\frac{3}{8}\right)^{0}\left(1-\frac{3}{8}\right)^{10}+C_{10}^{1}\left(\frac{3}{8}\right)^{1}\left(1-\frac{3}{8}\right)^{9}\right]=0.936$$

الموضوع الثاني

بكالوريا علوم تجريبية – نوفمبر 2005 -- **كاليدونيا الجديدة**

التمرين1 (5نقط)

المستوي المركّب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$. وحدة القياس $3cm$.

لكل نقطة M ذات اللاحقة z نرفق بواسطة الدالة f النقطة M' ذات اللاحقة z' حيث: $z'=\dfrac{(3+4i)z+5\overline{z}}{6}$.

نعتبر النقط A ، B و C ذات اللاواحق على الترتيب $z_A=1+2i$ ، $z_B=1$ و $z_C=3i$.

1. عيّن لواحق النقط A' ، B' و C'' صور النقط A ، B و C على الترتيب بواسطة الدالة f .
علّم النقط A ، B ، C ، A' ، B' و C' .
2. نضع: $z=x+iy$ (حيث x و y عددان حقيقيان).
عيّن الجزء الحقيقي والجزء التخيلي للعدد z' بدلالة x و y .
3. بيّن أن مجموعة النقط الصامدة في التحويل f هي المستقيم (D) الذي معادلته $y=\frac{1}{2}x$.
ارسم (D) . مـــاذا يمكن أن تلاحظ؟
4. لتكن M نقطة كيفية من المستوي و M' صورتها بالتحويل النقطي f . بيّن أن النقطة M' تنتمي إلى المستقيم (D) .
5. أ- بيّن أنه من أجل كل عدد مركّب z : لدينا $\dfrac{z'-z}{z_A}=\dfrac{z+\overline{z}}{6}+i\dfrac{z-\overline{z}}{3}$.
أستنتج أن العدد $\dfrac{z'-z}{z_A}$ حقيقي.
ب- استنتج أنه إذا كانت $M'\neq M$ فإن المستقيمان (OA) و (MM') متوازيان.
6. لتكن N نقطة كيفية من المستوي. كيف ننشئ صورتها N' بالتحويل f ؟ (ندرس حالتين: $N\in(D)$ ، $N\notin(D)$). ضع رسما لهذا الانشاء.

2 (5نقط)

تاليتان العدديتان (u_n) وَ (v_n) المعرّفتان من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n

يلي: $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_n = u_{n-1} + \frac{1}{n} \quad / n \geq 2 \end{cases}$ وَ $v_n = u_n - \ln n$ من أجل $n \geq 1$

. أ- أحسب u_2، u_3 وَ u_4.

ب- بيّن أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n: $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

. أ- بيّن أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم k: $\frac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{dx}{x} \leq \frac{1}{k}$

ب- استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n أكبر من أو يساوي 2، لدينا:

$u_n - 1 \leq \ln n \leq u_n - \frac{1}{n}$ وَ $0 \leq v_n \leq 1$.

3. أ- بيّن أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n: $v_{n+1} - v_n = \frac{1}{n+1} - \int_n^{n+1} \frac{dx}{x}$.

ب- استنتج اتجاه تغيّر المتتالية (v_n).

4. بيّن أن المتتالية (v_n) تتقارب. يرمز γ لنهايتها (لا يطلب حساب γ).

ما هي نهاية المتتالية (u_n)؟

ين 3 (5 نقط)

لتمرين يظم جزئين مستقلّين. الجزء I هو برهان لنتيجة من الدرس، والجزء II هو اسئلة

دة الاختيارات.

ـزء I

A وَ B حادثتان مستقلتان. بيّن أن الحادثتان A وَ $\overline{B}$ مستقلتان.

ـزء II

ل سؤال من الأسئلة التالية، هناك جواب واحد صحيح فقط.

شح يضع على ورقة الاجابة رقم السؤال والحرف الموافق للجواب الذي يراه صحيحا.

لا يطلب أي تعليل)

في حالة الاجابة صحيحة يحصل المترشح على 1. وَ في حالة الاجابة غير الصحيحة يحصل المترشح على 0.5 - . وَ غياب الاجابة يعني 0. إذا كانت مجموع علامات هذا الجزء عدد سالب فيحصل المترشح على 0 في الجزء II.

1. يحوي صندوق خمس كرات سوداء وثلاثة كرات حمراء لا نميّز بينها في اللمس.

نسحب في آن واحد ثلاثة كرات من الصندوق. ما احتمال الحصول على كرتين سوداء وكرة حمراء؟

(أ): $\frac{75}{512}$ ، (ب): $\frac{13}{56}$ ، (ج): $\frac{15}{64}$ ، (د): $\frac{15}{28}$

2. في وباء الأنفلونزة، قدّم التطعيم لثلث السكان. شخص واحد استفاد من التطعيم من بين كل عشرة مصابين.

احتمال أن يختار شخص عشوائيا من بين السكان فيكون من المصابين هو 0.25.

ما احتمال أن يكون شخص من بين السكان الخاضعين للتطعيم مصاب.

(أ): $\frac{1}{120}$ ، (ب): $\frac{3}{40}$ ، (ج): $\frac{1}{12}$ ، (د): $\frac{4}{40}$

3. ألقى لاعباً مرة واحدة نردا متوازنا.

يربح 10دج إذا ظهر الوجه1. يربح1 دج إذا ظهر الوجه 2 أو 4. لا يربح أي شيئ في الحالات الأخرى.

ليكن X المتغيّر العشوائي الذي يساوي أرباح اللاعب. ما هو تباين X؟

(أ): 2 ، (ب): 13 ، (ج): 16 ، (د): 17

4. مدة الانتظار T بالدقيقة، في نقطة استخلاص بالطريق السيار قبل المرور بشباك التذاكر، تعيّن المتغيّر العشوائي الذي يتبع القانون الأسي وسيطه $\lambda = \frac{1}{6}$.

أي من أجل كل عدد حقيقي $t > 0$، $p(T < t) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda x} dx$ / t يعيّن الزمن معبّر عنه بالدقيقة.

علما أن صاحب سيارة وقف ينتظر لمدة دقيقتين، ما احتمال(يدوّر إلى 10^{-4}) أن يكون وقت انتظاره الاجمالي أقل من خمس دقائق؟

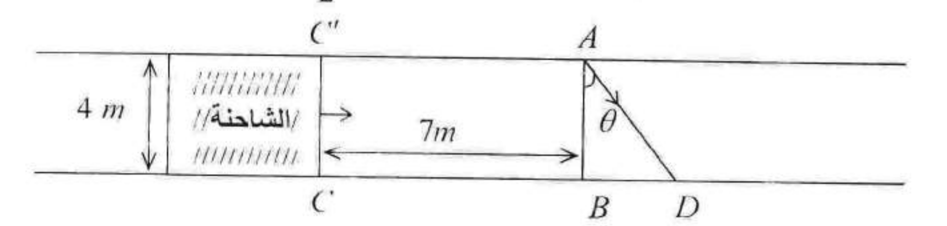
(أ): 0.2819 ، (ب): 0.3935 ، (ج): 0.5654 ، (د): 0.6065

التمرين 4 (5 نقط)

أرنب يرغب في اجتياز طريق سيار عرضه $4m$. شاحنة تستعمل عرض الطريق كاملاً تتجه نحو الأرنب بسرعة $60km/h$.

الأرنب يقرّر في اللحظة الأخيرة الاجتياز، و الشاحنة لا تبعد عنه سوى بـــ $7m$. أنطلق الأرنب كالسهم، ونفرض أنه يجتاز الطريق في خط مستقيم وفي أقصى سرعته، أي $30km/h$.

مقدّمة الشاحنة ممثلة بالقطعة المستقيمة $[CC'']$ في الرسم أدناه، والأرنب ينطلق من النقطة A في اتجاه النقطة D .هذا الاتجاه يعلّم بالزاوية $\theta = \widehat{BAD}$ حيث: $0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$ (بالراديان).



1. عيّن المسافتين AD وَ CD بدلالة θ، والزمنين t_1 وَ t_2 المنجزين من طرف الأرنب والشاحنة على الترتيب لقطع على الترتيب المسافتين AD وَ CD.
2. نضع: $f(\theta) = \frac{7}{2} + 2\tan\theta - \frac{4}{\cos\theta}$.
   بيّن أن الأرنب يجتاز الطريق قبل وصول الشاحنة إذا وفقط إذا كان $f(\theta) > 0$.
3. استنتج.

تصحيح الموضوع الثاني

بكالوريا علوم تجريبية -- نوفمبر 2005 -- **كاليدونيا الجديدة**

التمرين1 (5نقط) المستوي المركّب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}; \vec{v})$.

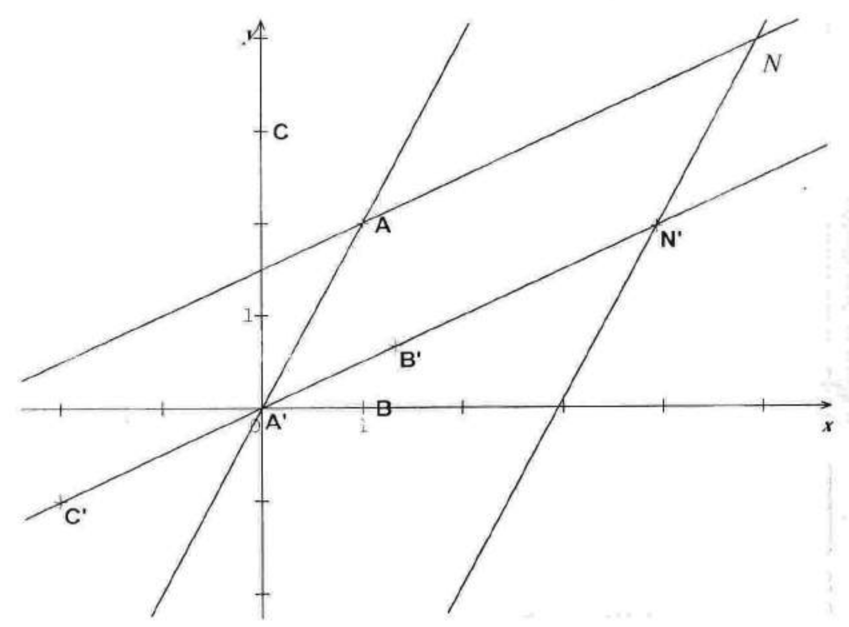
$f(M_z) = M'_{z'}$ يكافئ $z' = \frac{(3+4i)z + 5\bar{z}}{6}$

1. $z_A = 1 + 2i$,

$$z_{A'} = \frac{(3+4i)(1+2i)+5(1-2i)}{\ } = \frac{3-8+5+6i+4i-10i}{\ } = 0$$

$z_B = 1$, $z_{B'} = \frac{(3+4i)+5}{6} = \frac{4+2i}{3}$. $z_C = 3i$,

$$z_{C''} = \frac{3i(3+4i)-15i}{6} = -2-i$$



2. $z = x + iy$ (حيث x وَ y عددان حقيقيان).

$$z' = \frac{(3+4i)(x+iy)+5(x-iy)}{6} = \frac{3x-4y+5x}{6} + i\frac{4x+3y-5y}{6}$$

إذاً: $\text{Re}(z') = \frac{4x-2y}{3}$ وَ $\text{Im}(z') = \frac{2x-y}{3}$

3. $M(z)$ صامدة في التحويل f يكافئ $f(M) = M$ أي $z' = z$

يكافئ $\begin{cases} x = \frac{4x-2y}{3} \\ y = \frac{2x-y}{3} \end{cases}$ يكافئ $y = \frac{1}{2}x$.

إذاً: مجموعة النقط الصامدة في التحويل f هي المستقيم (D) الذي معادلته $y = \frac{1}{2}x$.

نلاحظ أن المستقيم (D) يظم النقط A' ، B' وَ C'' أي هي نقط صامدة.

4. $M(z)$ نقطة من المستوي وَ $M'(x';y')$ صورتها بالتحويل f تنتمي إلى المستقيم (D)، معناه احداثياتها تحقق معادلة (D).

لدينا: $y' = \frac{2x-y}{3} = \frac{1}{2}\left(\frac{4x-2y}{3}\right) = \frac{1}{2}x'$ هذا يعني أن النقطة M' تنتمي إلى المستقيم (D).

5. أ-

$$\frac{z'-z}{z_A} = \frac{(3+4i)z+5\bar{z}-6z}{6(1+2i)} = \frac{(-3+4i)z+5\bar{z}}{6(1+2i)}$$
$$= \frac{(-3+4i)(1-2i)z+5(1-2i)\bar{z}}{30}$$
$$= \frac{z+\bar{z}}{6} + i\frac{z-\bar{z}}{3}$$

بما ان $\frac{z+\bar{z}}{6} = \frac{2x}{6} = \frac{x}{3}$ فهو عدد حقيقي وَ $i\frac{z-\bar{z}}{3} = i\frac{2iy}{3} = -\frac{2y}{3}$ فهو كذلك عدد حقيقي

إذاً: $\frac{z'-z}{z_A} = \frac{x}{3} - \frac{2y}{3}$ عدد حقيقي.

ب- إذا كانت $M' \neq M$ فإن $\frac{z'-z}{z_A} = \frac{z'-z}{z_A - z_O}$ هو عدد حقيقي غير معدوم عمدته $k\pi$ حيث k عدد صحيح.

$$\arg\left(\frac{z'-z}{z_A-z_O}\right) = \arg(z'-z) - \arg(z_A-z_O) + 2k\pi = (\vec{u};\overrightarrow{MM'}) - (\vec{u};\overrightarrow{OA}) = k\pi$$

إذاً: $(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{MM'}) = k\pi$. يعني أن المستقيمان (OA) و (MM') متوازيان.

6. في حالة $N \notin (D)$: حسب السؤالين 4 وَ 5-ب فإن N' هي النقطة المشتركة بين المستقيم (D) والمستقيم الذي يوازي (OA) ويشمل N.

في حالة $N \in (D)$: حسب السؤال 3 فإن N' تنطبق على N. (الشكل)

التمرين 2 (5 نقط)

نعتبر المتتاليتان العدديتان (u_n) وَ (v_n) المعرّفتان من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n كما يلي:

$$\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_n = u_{n-1} + \frac{1}{n} & / n \geq 2 \end{cases}$$ و $v_n = u_n - \ln n$ من أجل $n \geq 1$

1. أ- $u_2 = u_1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$ ، $u_3 = u_2 + \frac{1}{3} = \frac{3}{2} + \frac{1}{3} = \frac{11}{6}$ ،

$$u_4 = u_3 + \frac{1}{4} = \frac{11}{6} + \frac{1}{4} = \frac{25}{12}$$

ب- نستعمل البرهان بالتراجع. $u_1 = \sum_{k=1}^{1}\frac{1}{k} = 1$ محققة.

نفرض أن $u_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$ محققة إلى الرتبة n

$u_{n+1} = u_n + \frac{1}{n+1} = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} + \frac{1}{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k}$ وهو المطلوب.

إذاً من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n: $u_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$.

2. أ- k عدد طبيعي غير معدوم كيفي.

من اجل كل x من المجال $[k;k+1]$،

لدينا $k \leq x \leq k+1$ يكافئ $\frac{1}{k+1} \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{k}$

يكافئ $\int_k^{k+1}\frac{1}{k+1}dx \leq \int_k^{k+1}\frac{1}{x}dx \leq \int_k^{k+1}\frac{1}{k}dx$ (خواص التكامل لدوال موجبة)

أي $\frac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1}\frac{dx}{x} \leq \frac{1}{k}$.

ب- نكتب العلاقة الأخيرة من أجل $k=1$ ثم $k=2$ ثم...ثم $k=n$ نجد:

$\frac{1}{2} \leq \int_1^2\frac{dx}{x} \leq 1$ وَ $\frac{1}{3} \leq \int_2^3\frac{dx}{x} \leq \frac{1}{2}$ وَ... وَ $\frac{1}{n} \leq \int_{n-1}^{n}\frac{dx}{x} \leq \frac{1}{n-1}$

بالجمع طرف لطرف وباستعمال علاقة شال للتكاملات نجد:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n} \leq \int_1^n\frac{dx}{x} \leq 1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n-1}$$

أي $u_n - 1 \leq \ln n \leq u_n - \frac{1}{n}$

من العلاقة الأخيرة ينتج ان $u_n - \ln n \le 1$ وَ $u_n - \ln n \ge \frac{1}{n}$

أي $\frac{1}{n} \le u_n - \ln n \le 1$

يعني أن: $\frac{1}{n} \le v_n \le 1$ وبالخصوص $0 \le v_n \le 1$

3. أ- من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n:

$$v_{n+1}-v_n = u_{n+1} - \ln(n+1) - u_n + \ln n = [u_{n+1}-u_n] - [\ln(n+1)-\ln n] = \frac{1}{n+1} - \int_n^{n+1}\frac{dx}{x}$$

ب- من الحصر المحصّل عليه في السؤال الثاني نجد: $\frac{1}{n+1} \le \int_n^{n+1}\frac{dx}{x}$

أي $\frac{1}{n+1} - \int_n^{n+1}\frac{dx}{x} \le 0$

يعني أن $v_{n+1}-v_n \le 0$ من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n:

وبالتالي (v_n) متناقصة تماما على N .

4. (v_n) متناقصة تماما ومحدودة من الأسفل بالعدد 0 فهي إذاً متقاربة نحو عدد γ أكبر من أو يساوي 0.

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty}(v_n + \ln n) = \gamma + (+\infty) = +\infty$$

التمرين 3 (5 نقط)

الجـــزء I

A وَ B حادثتان مستقلتان، يعني أن $p(A\cap B) = p(A)\times p(B)$

بما أن $p(A\cap B)+p(A\cap\overline{B}) = p(A)$ كون الحادثتين $(A\cap B)$ وَ $(A\cap \overline{B})$ غير متلائمتين

فإن: $p(A\cap\overline{B}) = p(A) - p(A\cap B) = p(A) - p(A)\times p(B)$

$= p(A)[1-p(B)] = p(A)\times p(\overline{B})$

يعني أن A وَ $\overline{B}$ حادثتان مستقلتان.

الجـــزء II

1. يحوي صندوق خمس كرات سوداء وثلاث كرات حمراء لا نميّز بينها في اللمس.

نسحب في آن واحد ثلاثة كرات من الصندوق. عدد السحبات الممكنة هو $C_8^3 = 56$

احتمال الحصول على كرتين سوداء وكرة حمراء هو: $\frac{C_5^2\times C_3^1}{56}$

وهو: $\frac{15}{28}$ الاجابة (د).

2. من بين المصابين بالانفلونزة هناك x احتمال لشخص خضع للتطعيم، وبالتالي $9x$ احتمال لم يخضعوا للتطعيم، والمجموع $x+9x$ يمثل احتمال اختيار شخص من المصابين. إذاً: $x+9x=0.25$ أي: $x=\frac{1}{40}$

احتمال شخص خضع للتطعيم من بين المصابين هو $\frac{1}{40}$

وبالتالي احتمال أن يكون شخص من بين السكان الخاضعين للتطعيم مصاب، هو الاحتمال الشرطي

$p_V(G) = \frac{p(V\cap G)}{p(V)} = \frac{\frac{1}{40}}{\frac{1}{3}} = \frac{3}{40}$ حيث: $p(V)$ احتمال اختيار شخص تعرض للتطعيم، وَ $(V\cap G)$ حادثة اختيار شخص تعرّض للتطعيم من بين المصابين.

الاجابة (ب).

3. الأمل الرياضي للمتغيّر العشوائي X هو:

$E(X)=\sum_{i=1}^{6} x_i p_i = 10\left(\frac{1}{6}\right)+1\left(\frac{2}{6}\right)+0\left(\frac{3}{6}\right)=2$ حيث x_i تمثّل قيم المتغيّر العشوائي X وَ p_i يمثّل احتمال x_i.

وبالتالي التباين يعطى بالدستور:

$V(X)=\sum_{i=1}^{6}(x_i-E(X))^2 p_i = \frac{1}{6}(64+1+1+4+4+4)=\frac{78}{6}=13$. الاجابة (ب).

4. احتمال أن يكون وقت انتظاره الاجمالي أقل من خمس دقائق علما أنه وقف ينتظر لمدة دقيقتين.هو:

$$p_{(T>2)}(T<5)=\frac{p[(T>2)\cap(T<5)]}{p(T>2)}=\frac{\int_2^5 \lambda e^{-\lambda x}dx}{1-\int_0^2 \lambda e^{-\lambda x}dx}$$

$$=\frac{e^{-\frac{2}{6}}-e^{-\frac{5}{6}}}{e^{-\frac{2}{6}}}=1-e^{-\frac{1}{2}}\approx 0.3935$$

. الاجابة (ب).

التمرين 4 (5 نقط)

1. المثلث ABD قائم في B . لدينا إذن: $\cos\theta=\frac{AB}{AD}$ وبالتالي:

$$AD=\frac{AB}{\cos\theta}=\frac{4}{\cos\theta}$$

وكذلك لدينا: $\tan\theta=\frac{BD}{AB}$ أي $BD=AB\tan\theta=4\tan\theta$

إذاً: $t_1=\frac{AD}{v_1}=\frac{0.004}{\cos\theta}\times\frac{1}{30}=\frac{0.0004}{3\cos\theta}$ و $t_2=\frac{CD}{v_2}=\frac{0.007+0.004\tan\theta}{60}$

2. $f(\theta)=\frac{7}{2}+2\tan\theta-\frac{4}{\cos\theta}$. الأرنب يجتاز الطريق قبل وصول الشاحنة **إذا وفقط إذا كان** $t_1<t_2$

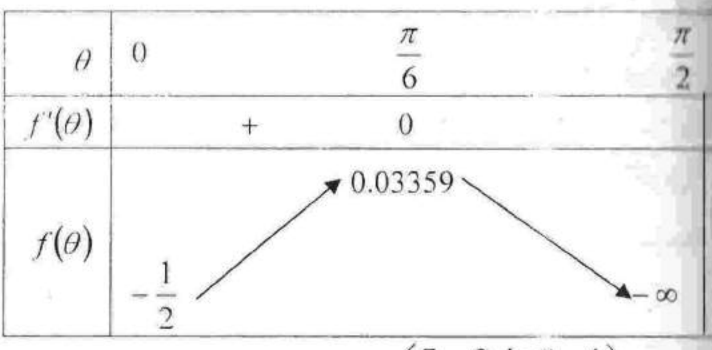
أي $\frac{0.0004}{3\cos\theta}<\frac{0.007+0.004\tan\theta}{60}$ يكافئ $\frac{7}{2}\cos\theta+2\sin\theta-4>0$

أي $f(\theta)>0$

3. ندرس اتجاه تغيرات الدالة f : من أجل كل $0\le\theta<\frac{\pi}{2}$ ، $f'(\theta)=\frac{2-4\sin\theta}{\cos^2\theta}$

$f'(\theta)$ له اشارة العدد $(1-2\sin\theta)$.

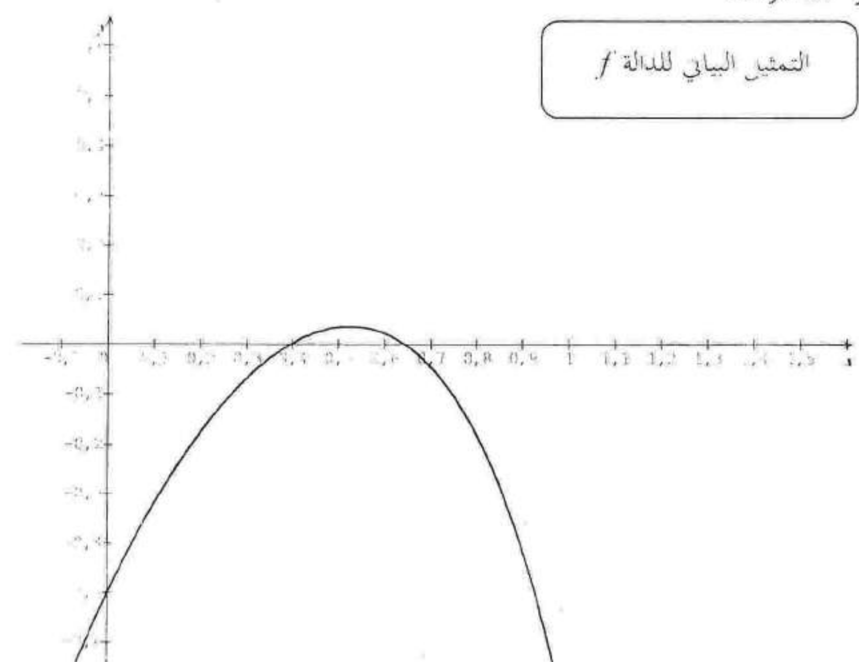
$f'(\theta)=0$ يكافئ $\theta=\frac{\pi}{6}$. ندرس الاشارة نجد: f متزايدة تماما على $\left[0;\frac{\pi}{6}\right]$ ومتناقصة تماما على $\left[\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{2}\right[$.



θ	0		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{2}$
$f'(\theta)$		$+$	0		
$f(\theta)$	$-\frac{1}{2}$	↗	0.03359	↘	$-\infty$

$$\lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}} f(\theta)=\lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{7}{2}+\frac{2\sin\theta-4}{\cos\theta}\right)=-\infty$$

حسب الرسم، تكون $f>0$ عندما يكون $0.4<\theta<0.64...$ يعني الزاوية θ محصورة بين 23 وَ 27 درجة.



الموضوع الثالث

بكالوريا علوم تجريبية -- مـاي 2006 -- أمريكا الشمالية

التمرين1 (5 نقط)

في كل سؤال من الأسئلة الثلاثة التالية، هناك جواب واحد صحيح من بين الاقتراحات الثلاثة.
المترشح يضع على ورقة الاجابة رقم السؤال والحرف الموافق للجواب الذي يراه صحيحا.
(لا يطلب أي تعليل)

في حالة الاجابة صحيحة يحصل المترشح على 1.وَ في حالة الاجابة غير الصحيحة يحصل المترشح على 0.5 – .وَ غياب الاجابة يعني 0. إذا كانت مجموع علامات هذا التمرين عدد سالب فيحصل المترشح على 0 في هذا التمرين.

يحوي صندوق 10 أضرفة غير مميّزة في اللمس، مقسّمة إلى ثلاثة أنواع وفق ما يلي:
4 أضرفة سجلت عليها كلمة (نعم)، 3 أضرفة سجلت عليها كلمة (لا) وَ 3 أضرفة لم يسجّل عليها أي شيئ (بيضاء).

في اللعبة الأولى، يبدأ اللاعب بتقديم $30DA$. ويسحب غلافا من الصندوق ثم يرجعه بعد قراءة ما كتب عليه.

إذا كان الضرف المسحوب مكتوب عليه(نعم)،فإن اللاعب يتلقى $60DA$وَ إذا كان مكتوب عليه(لا) فإن اللاعب لايتلقى شيئاً وَ إذا كان الضرف المسحوب ليس مكتوب عليه أي شيء (أبيض) فإن اللاعب يتلقى $20DA$.

1. اللعبة :

(أ): مربحة للاعب ، (ب): غير مربحة للاعب ، (ج): متعادلة الربح والخسارة

2. يقوم اللاعب بأربع جولات مستقلّة عن بعضها. احتمال أن يسحب على الأقل مرة واحدة ضرفا سجّل عليه (نعم) هو:

(أ): $\frac{216}{625}$ ، (ب): $\frac{544}{625}$ ، (ج): $\frac{2}{5}$

في اللعبة الثانية، يسحب اللاعب ضرفين من الصندوق في آن واحد.

3. احتمال أن يحصل على ضرفين من نوعين مختلفين:

(أ): $\frac{4}{15}$ ، (ب): $\frac{11}{30}$ ، (ج): $\frac{11}{15}$

التمرين 2 (5 نقط)

المستوي المركّب مزوّد بالمعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$. (الوحدة $2cm$)
نعتبر النقط A ، B وَ C ذات اللاواحق على الترتيب $z_A=2$ ، $z_B=1+i\sqrt{3}$ وَ $z_C=1-i\sqrt{3}$.

الجـــزء I

1. أ- أعط الشكل الأسي لكل من العددين z_B وَ z_C.
   ب- ضع في رسم النقط A ، B وَ C.
2. عيّن طبيعة الرباعي $OBAC$.
3. عيّن وأنشئ المجموعة (D) للنقط M من المستوي والتي لاحقتها z تحقق: $|z|=|z-2|$.

الجـــزء II

لكل نقطة M من المستوي ذات اللاحقة z حيث $z\neq z_A$ ،نرفق النقطة M' من المستوي ذات اللاحقة z' حيث $z'=\frac{-4}{z-2}$.

1. أ- حل في مجموعة الأعداد المركّبة $\mathbf{C}$ المعادلة $z=\frac{-4}{z-2}$.
   ب- استنتج النقط المرفقة للنقطتين B وَ C.
   ج- عيّن وأنشئ النقطة G' المرفقة لمركز ثقل المثلث OAB.
2. أ- سؤال من الدرس.
   بيّن أن: من أجل كل عددين مركّبين z_1 وَ z_2 لدينا: $|z_1\times z_2|=|z_1|\times|z_2|$
   وَمن أجل كل عدد مركّب z غير معدوم لدينا: $\left|\frac{1}{z}\right|=\frac{1}{|z|}$.
   ب- بيّن أنه من أجل كل عدد مركّب z يختلف عن 2، $|z'-2|=\frac{2|z|}{|z-2|}$.
   ج- نفرض في هذا السؤال أن M نقطة كيفية من المجموعة(D)، حيث (D) هي المجموعة المعرّفة في الجزء I.
   بيّن أن النقطة M' المرفقة للنقطة M ، تنتمي إلى دائرة Γ يطلب تعيين مركزها

ونصف قطرها. أنشئ Γ.

التمرين 3 (5 نقط)

1. نعتبر الدالة g المعرّفة على المجال $]0;+\infty[$ بالدستور: $g(x)=\ln x-\frac{2}{x}$

يعطى فيما يلي جدول تغيرات الدالة g.

x	0	2.3	x_0	2.4	$+\infty$
g	$-\infty$ ↗		0	↗	$+\infty$

بيّن كل خواص الدالة g المجتمعة في هذا الجدول.

2. نعتبر الدالة f المعرّفة على المجال $]0;+\infty[$ بالدستور: $f(x)=\frac{5\ln x}{x}$.

أ- بيّن أن $f(x_0)=\frac{10}{x_0^{\,2}}$ حيث x_0 هو العدد الذي يظهر في جدول تغيرات الدالة g.

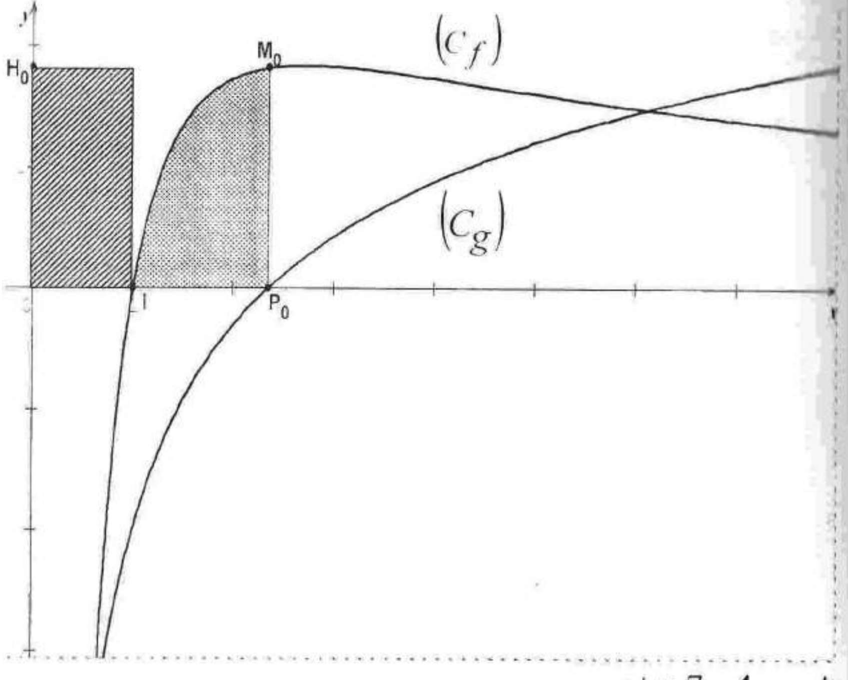
ب- ليكن a عدد حقيقي. من أجل $a \geq 1$، عبّر عن $\int_1^a f(t)dt$ بدلالة a.

3. (C_f) وَ (C_g) التمثيلان البيانيان للدالتين f وَ g على الترتيب ممثّلين في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.(الرسم معطى في نهاية التمرين)

نعتبر النقطة I ذات الاحداثيات $(1;0)$، P_0 هي نقطة تقاطع المنحني (C_g) مع حامل محور الفواصل، M_0 النقطة من المنحني (C_f) والتي لها نفس فاصلة النقطة P_0، وَ H_0 المسقط العمودي للنقطة M_0 على حامل محور التراتيب.

نسمي (D_1) الحيّز من المستوي المحدّد بالمنحني (C_f) والقطعتين المستقيمتين $[IP_0]$ وَ $[P_0M_0]$.

نسمي (D_2) الحيّز من المستوي المحدّد بالمستطيل المرسوم من القطعتين المستقيمتين $[OI]$ وَ $[OH_0]$. بيّن ان للحيّزين (D_1) وَ (D_2) نفس المساحة، ثم اعط حصراً لهذه المساحة.



التمرين 4 (7 نقط)

المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

نهتم بالدالة f القابلة للاشتقاق على المجال $[0;+\infty[$ والتي تحقق الشرطين:

(1): من اجل كل x من المجال $[0;+\infty[$، $f'(x)=4-[f(x)]^2$

(2): $f(0)=0$.

نقبل أنه توجد دالة واحدة f تحقق الشرطين (1) وَ (2).

الجزءان A وَ B من هذا التمرين يمكن معالجتهما بطريقة مستقلة، الرسم المعطى في نهاية التمرين يملء ويرجع مع ورقة الاجابة.

الجـــــزء A . دراسة متتالية

للحصول على تقريب للمنحني الممثّل للدالة f نستعمل طريقة أولر بخطوة تساوي 0.2.

نحصل إذاً على متتالية النقط نرمز لها (M_n)، فاصلتها x_n وترتيبها y_n حيث:

$x_0=0$، ومن أجل كل عدد طبيعي n، $x_{n+1}=x_n+0.2$.

وَ $y_0=0$، ومن أجل كل عدد طبيعي n، $y_{n+1}=-0.2y_n^{\,2}+y_n+0.8$.

1. أ- احداثيات النقط الأولى محجوزة في الجدول المرفق. أكمل هذا الجدول. تُقدم النتائج بتقريب إلى 10^{-4}.

ب- ضع على الرسم المعطى النقط M_n من أجل $n \le 7$.

ج- حسب هذا الرسم ماهو التخمين الذي يمكننا وضعه فيما يتعلّق باتجاه تغيّر المتتالية (y_n) و كذلك تقاربها.

2. أ- من أجل x عدد حقيقي، نضع: $p(x) = -0.2x^2 + x + 0.8$

بيّن أنه إذا كان $x \in [0;2]$ فإن $p(x) \in [0;2]$.

ب- بيّن أنه من أجل كل عدد طبيعي n، $0 \le y_n \le 2$.

ج- ادرس اتجاه تغيّر المتتالية (y_n).

د- هل المتتالية (y_n) متقاربة؟

الجزء B. دراسة دالة

g الدالة العددية المعرّفة على المجال $[0;+\infty[$ بالدستور: $g(x)=2\left(\frac{e^{4x}-1}{e^{4x}+1}\right)$ وَ (C_g) تمثيلها البياني.

1. بيّن أن الدالة g تحقق الشرطين (1) وَ (2).
2. أ- بيّن أن المنحني (C_g) يقبل مستقيم مقارب Δ يطلب تعيين معادلته.

ب- أدرس اتجاه تغيّر الدالة g على المجال $[0;+\infty[$.

3. عيّن الفاصلة α لنقطة تقاطع المستقيم Δ مع المماس للمنحني (C_g) عند النقطة O.
4. أرسم في المعلم المعطى في الشكل، المنحني (C_g) و كذا العناصر التي ظهرت في هذا الجزء B.

الجدول المرفق

n	0	1	2	3	4	5	6	7
x_n	0	0.2	0.4					
y_n	0	0.8000	1.4720					

الرسم المرفق

تصحيح الموضوع الثالث

بكالوريا علوم تجريبية -- ماي 2006 -- أمريكا الشمالية

التمرين1 (5نقط)

1. نحسب الأمل الرياضي للمتغير العشوائي X المقترح في النص.

$E(X)=\frac{4}{10}(60-30)+\frac{3}{10}(0-30)+\frac{3}{10}(20-30)=0$. يعني أن اللعبة متعادلة الربح والخسارة. الاجابة (ج).

2. نضع: A حادثة " سحب على الأقل (نعم). إذاً : $\overline{A}$ حادثة " لا يسحب (نعم).

$p(A)=1-p(\overline{A})=1-\left(\frac{6}{10}\right)^4$ باعتبار قانون ثنائي الحد وسيطاه $n=4$ وَ $p=\frac{4}{10}$

إذاً : $p(A)==1-\frac{81}{625}=\frac{544}{625}$. الاجابة (ب).

3. عدد الحالات الممكنة في هذه اللعبة هو: $Card(\Omega)=C_{10}^2=45$

حادثة الحصول على ضرفين من نوعين مختلفين. تعني:

(نعم) وَ (لا) أو (نعم) وَ (أبيض) أو (لا) وَ (أبيض)

احتمالها هو: $\frac{C_4^1\times C_3^1+C_4^1\times C_3^1+C_3^1\times C_3^1}{45}=\frac{12+12+9}{45}=\frac{11}{15}$. الاجابة (ج).

التمرين 2 (5 نقط)

المستوي المركّب مزوّد بالمعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$. (الوحدة $2cm$)

نعتبر النقط A ، B وَ C ذات اللاواحق على الترتيب $z_A=2$ ، $z_B=1+i\sqrt{3}$ و $z_C=1-i\sqrt{3}$.

الجـــــزء I

1. أ- $z_B=1+i\sqrt{3}=2\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=2e^{i\frac{\pi}{3}}$ ، $z_C=1-i\sqrt{3}=2e^{-i\frac{\pi}{3}}$ كون $z_C=\overline{z_B}$.

ب- انظر الرسم.

2. الرباعي $OBAC$ معيّن ذلك لأن: $OB=BA=AC=CO=2$.

3. $M(z)$ نقطة من (D) معناه $|z|=|z-2|$ أي $OM=AM$

إذاً: (D) محور القطعة المستقيمة $[OA]$

الجـــــزء II

لكل نقطة M من المستوي ذات اللاحقة z حيث $z\neq z_A$ ،نرفق النقطة M' من المستوي ذات اللاحقة z' حيث $z'=\frac{-4}{z-2}$.

1. أ- $z=\frac{-4}{z-2}$ تكافئ $z^2-2z+4=0$ تكافئ $(z-1)^2=-3$ أي $z=1+i\sqrt{3}$ أو $z=1-i\sqrt{3}$.

إذاً : $S=\{z_B;z_C\}$

ب- ينتج أن B ترفق بالنقطة B نفسها، وكذلك C ترفق بالنقطة C نفسها.

ج- لاحقة النقطة G مركز ثقل المثلث OAB هي: $\frac{1}{3}(0+z_A+z_B)=\frac{1}{3}(3+i\sqrt{3})$

إذاً لاحقة G' هي: $z_{G'}=\frac{-4}{z_G-2}=\frac{-4}{1+i\frac{\sqrt{3}}{3}-2}=3+i\sqrt{3}$.

2. أ- سؤال من الدرس.

نعلم من الدرس أن $|z|=\sqrt{z\overline{z}}$. إذاً:

$$|z_1\times z_2|=\sqrt{(z_1\times z_2)(\overline{z_1\times z_2})}=\sqrt{(z_1\times\overline{z_1})(z_2\times\overline{z_2})}=\sqrt{z_1\times\overline{z_1}}\times\sqrt{z_2\times\overline{z_2}}=|z_1|\times|z_2|$$

و من أجل كل عدد مركّب z غير معدوم لدينا: $\left|z\times\frac{1}{z}\right|=1$ أي $|z|\times\left|\frac{1}{z}\right|=1$

وبالتالي: $\left|\frac{1}{z}\right|=\frac{1}{|z|}$.

ب- z عدد مركّب كيفي يختلف عن 2،

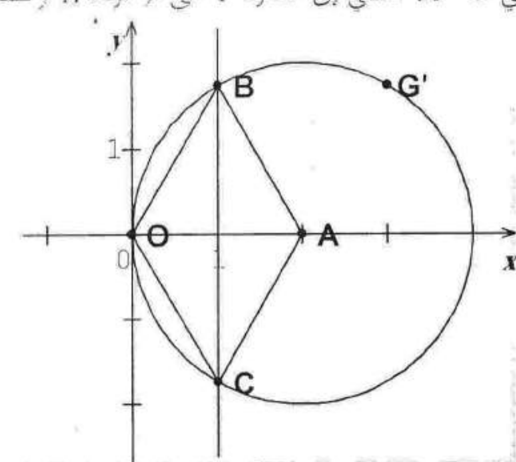
$$|z'-2|=\left|\frac{-4}{z-2}-2\right|=\left|\frac{-2z}{z-2}\right|=\frac{|-2z|}{|z-2|}=\frac{2|z|}{|z-2|}$$

ج- لدينا فرضاً: M نقطة كيفية من المجموعة (D)، معناه $|z|=|z-2|$

لاحقة النقطة M' تحقق العلاقة $|z'-2|=\frac{2|z|}{|z-2|}$ أي $|z'-2|=\frac{2|z|}{|z|}=2$

معناه $AM'=2$

هذه الكتابة الأخيرة تعني أن M' تنتمي إلى الدائرة Γ التي مركزها A ونصف قطرها 2.



التمرين 3 (5 نقط)

1. نعتبر الدالة g المعرّفة على المجال $]0;+\infty[$ بالدستور: $g(x)=\ln x-\frac{2}{x}$

x	0		2.3	x_0	2.4		$+\infty$
g	$-\infty$	↗		0		↗	$+\infty$

من جدول تغيرات الدالة g ، نجد:

نهاية الدالة g عند 0^+ هي $-\infty$ ذلك لأن: $\lim\limits_{x\to 0^+}\ln x=-\infty$ وَ $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(-\frac{2}{x}\right)=-\infty$

نهاية الدالة g عند $+\infty$ هي $+\infty$ ذلك لأن: $\lim\limits_{x\to +\infty}\ln x=+\infty$ وَ $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(-\frac{2}{x}\right)=0^-$

الدالة g تقبل الاشتقاق على $]0;+\infty[$ كمجموع دالتين، ولدينا: $g'(x)=\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}>0$

يعني g متزايدة تماما على $]0;+\infty[$.

g مستمرة ومتزايدة تماما على $]0;+\infty[$ وتأخذ قيمها في $]-\infty;+\infty[$. إذا: الدالة g تنعدم مرة واحدة في المجال $]0;+\infty[$ عند القيمة x_0 حيث $2.3<x_0<2.4$

كون: $g(2.4)\approx 0.04$ وَ $g(2.3)\approx -0.04$. (مبرهنة القيم المتوسطة)

2. f الدالة المعرّفة على المجال $]0;+\infty[$ بالدستور: $f(x)=\frac{5\ln x}{x}$.

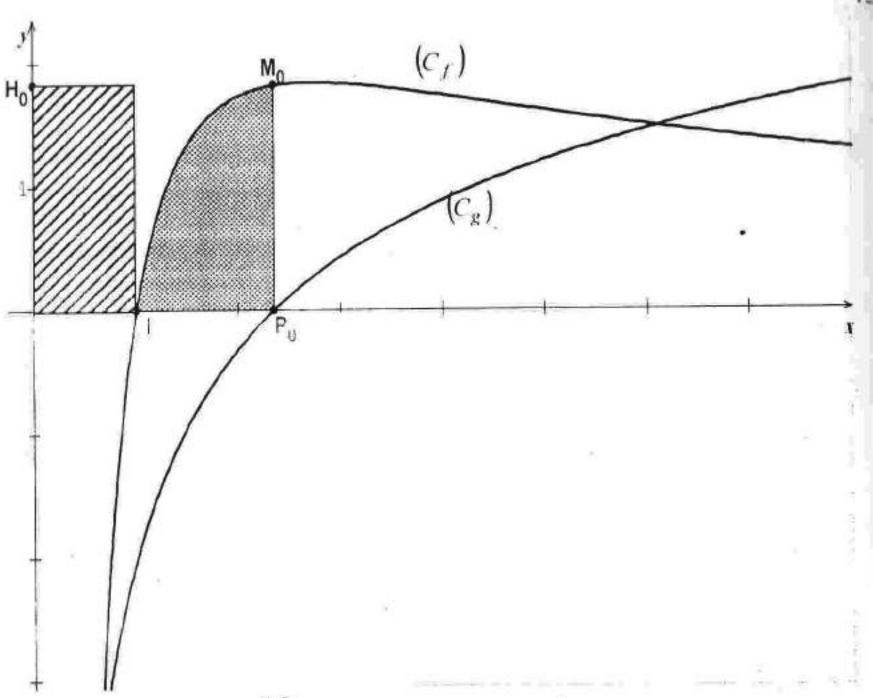
أ- لدينا $g(x_0)=0$ يعني أن $\ln x_0=\frac{2}{x_0}$.

إذاً: $f(x_0)=\frac{5\ln x_0}{x_0}=\frac{5\frac{2}{x_0}}{x_0}=\frac{10}{x_0^2}$.

ب- a عدد حقيقي أكبر من 1. لدينا:

$$\int_1^a f(t)dt=5\int_1^a\frac{\ln t}{t}dt=5\int_1^a\frac{1}{t}\ln t\,dt=5\left[\frac{1}{2}(\ln t)^2\right]_1^a=\frac{5}{2}(\ln a)^2$$

3.



لدينا فاصلة النقطة P_0 هي x_0، إذاً ترتيب النقطة M_0 هو $f(x_0)=\frac{10}{x_0^2}$.

مساحة الحيّز (D_1) هي:
$$\int_1^{x_0} f(t)\,dt=\frac{5}{2}(\ln x_0)^2=\frac{10}{x_0^2}=f(x_0)$$

مساحة الحيّز (D_2) هي مساحة المستطيل الذي طوله $f(x_0)$ وعرضه 1.

إذاً: للحيّزين (D_1) وَ(D_2) نفس المساحة وهي: $f(x_0)$.

لدينا: $2.3<x_0<2.4$ وبالتالي: $5.29<x_0^2<5.76$ أي $0.173<\frac{1}{x_0^2}<0.189$

إذاً: $1.73<f(x_0)<1.89$.

التمرين 4 (7 نقط)

المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$. نهتم بالدالة f القابلة للاشتقاق على المجال $[0;+\infty[$ والتي تحقق الشرطين:

(1): من اجل كل x من المجال $[0;+\infty[$، $f'(x)=4-[f(x)]^2$ و (2): $f(0)=0$.

نقبل أنه توجد دالة واحدة f تحقق الشرطين (1) و(2).

الجـــزء A. دراسة متتالية

نعتبر متتالية النقط (M_n)، فاصلتها x_n وترتيبها y_n حيث:

$x_0=0$، ومن أجل كل عدد طبيعي n، $x_{n+1}=x_n+0.2$.

و $y_0=0$، ومن أجل كل عدد طبيعي n، $y_{n+1}=-0.2{y_n}^2+y_n+0.8$.

1. أ- نكمل الجدول بالتعويض مباشرة في العلاقتين التراجعيتين السابقتين.

n	0	1	2	3	4	5	6	7
x_n	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1	1.2	1.4
y_n	0	0.8000	1.4720	1.8386	1.9625	1.9922	1.9984	1.9997

ب- أنظر الرسم في نهاية الحل.

ج- يظهر أن المتتالية (y_n) متزايدة ومتقاربة نحو العدد 2.

2. أ- من أجل x عدد حقيقي، نضع: $p(x)=-0.2x^2+x+0.8$

الدالة p تقبل الاشتقاق على كامل R ولدينا: $p'(x)=-0.4x+1$

$p'(x)>0$ من أجل $x\in]-\infty;2.5[$ وبالخصوص من أجل $x\in[0;2]$.

إذاً: الدالة p مستمرة ومتزايدة تماما على $[0;2]$.

وبالتالي: إذا كان $x\in[0;2]$ فـــإن $p(x)\in[p(0);p(2)]$. وبما أن $p(0)=0.8$ و $p(2)=2$ و $[0.8;2]\subset[0;2]$. فإنه: إذا كان $x\in[0;2]$ فـــإن $p(x)\in[0;2]$.

ب- نبرهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n، $0\le y_n\le 2$.

لدينا $y_0=0$ أي $0\le y_0\le 2$ محققة.

نفرض أن $0\le y_k\le 2$ محققة إلى الرتبة k.

فحسب البرهان السابق وعلما أن $p(y_k)=-0.2{y_k}^2+y_k+0.8=y_{k+1}$

إذا كان $0\le y_k\le 2$ فإن $0\le p(y_k)\le 2$ وهو المطلوب.

ج- بما أنه من أجل كل عدد طبيعي n، $0\le y_n\le 2$. وعلما أن $y_0=0$ و $y_1=0.8$ أي $y_1>y_0$

فإن $p(y_1)>p(y_0)$ أي $y_2>y_1$ كون الدالة p متزايدة تماما على $[0;2]$.

باتباع الطريقة التراجعية نحصل على : من أجل كل عدد طبيعي n،

$0\le y_0<y_1<y_2<...<y_n<y_{n+1}\le 2$.

يعني أن المتتالية (y_n) متزايدة تماما على N.

د- المتتالية (y_n) متزايدة تماما على N ومحدودة من الأعلى بالعدد 2، فهي إذاً متقاربة.

الجـــزء B. دراسة دالـــة

g الدالة العددية المعرّفة على المجال $[0;+\infty[$ بالدستور: $g(x)=2\left(\frac{e^{4x}-1}{e^{4x}+1}\right)$ و (C_g) تمثيلها البياني.

1. من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[0;+\infty[$،

$$g'(x)=2\left(\frac{4e^{4x}(e^{4x}-1)-4e^{4x}(e^{4x}+1)}{(e^{4x}+1)^2}\right)=\frac{16e^{4x}}{(e^{4x}+1)^2}$$

ولدينا: $4-[g(x)]^2=4\frac{(e^{4x}+1)^2-(e^{4x}-1)^2}{(e^{4x}+1)^2}=4\frac{2e^{4x}\times 2}{(e^{4x}+1)^2}=\frac{16e^{4x}}{(e^{4x}+1)^2}$

إذاً الشرط (1) محقق. ولدينا $g(0)=2\frac{e^{4\times0}-1}{e^{4\times0}+1}=0$ يعني أن الشرط (2) كذلك محقق.

2. أ – لدينا:

$$\lim_{+\infty}g(x)=lim_{+\infty}2\left(\frac{e^{4x}-1}{e^{4x}+1}\right)=lim_{+\infty}2\left(\frac{e^{4x}(1-e^{-4x})}{e^{4x}(1+e^{-4x})}\right)=lim_{+\infty}2\frac{(1-e^{-4x})}{(1+e^{-4x})}=2$$

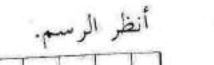
كون $\lim_{+\infty}e^{-x}=0$.

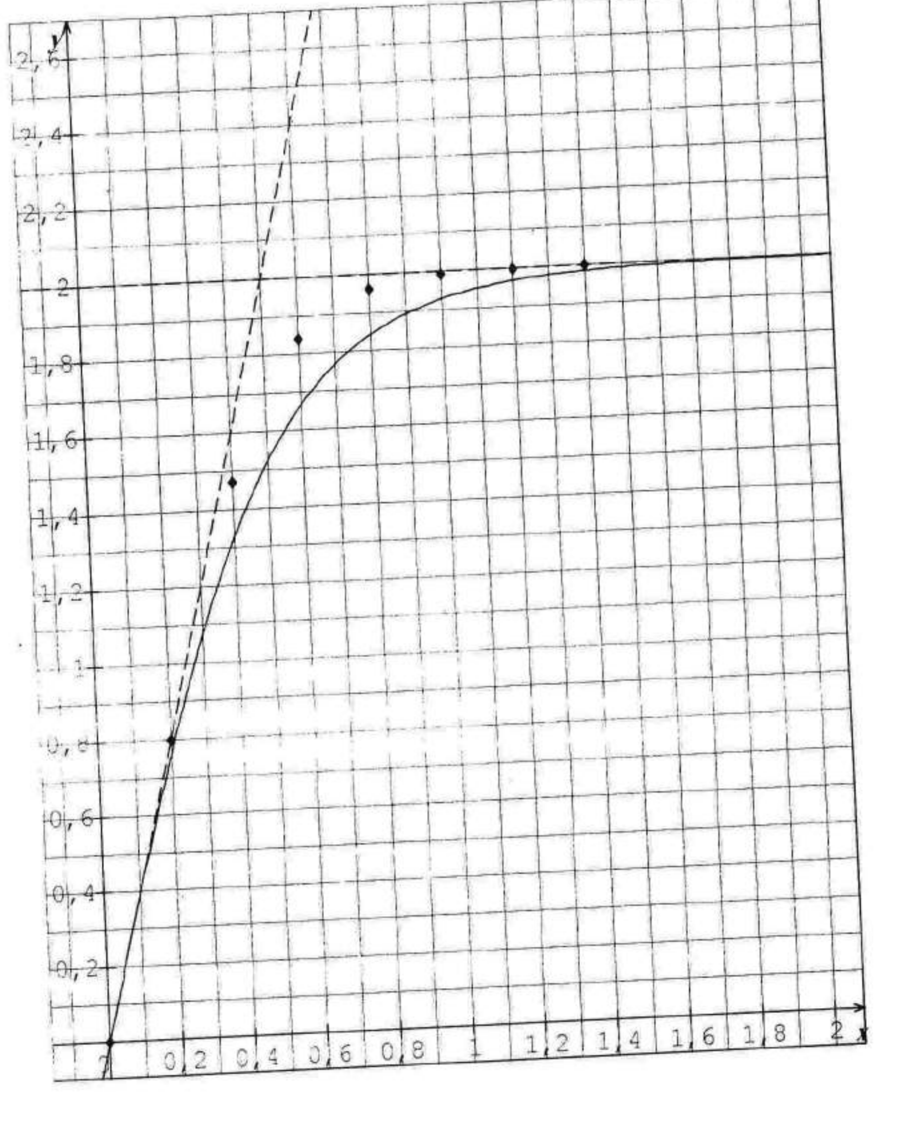
يعني أن المنحني (C_g) يقبل مستقيم مقارب Δ معادلته $y=2$ بجوار $+\infty$.

ب- لدينا مما سبق من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[0;+\infty[$،

$g'(x)=\frac{16e^{4x}}{(e^{4x}+1)^2}>0$ إذاً الدالة g متزايدة تماما على المجال $[0;+\infty[$.

3. معادلة المماس للمنحني (C_g) عند النقطة O هي: $y=g'(0)x=4x$ يقطع المستقيم Δ عند النقطة ذات الاحداثيات $\left(\frac{1}{2};2\right)$ أي $\alpha=\frac{1}{2}$.

4. 
أنظر الرسم.



الموضوع الرابع

بكالوريا علوم تجريبية -- مـــاي 2006 -- لبنـــان

التمرين 1 (5نقط)

$(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ معلم للفضاء متعامد ومتجانس. نعتبر النقط $A(2;1;3)$ ، $B(-3;-1;7)$ وَ $C(3;2;4)$.

1. بيّن أن النقط A ، B وَ C ليست على استقامة واحدة.

2. ليكن (d) المستقيم الذي تمثيله الوسيطي $\begin{cases} x=-7+2t \\ y=-3t \\ z=4+t \end{cases}$ / t عدد حقيقي.

أ) بيّن أن المستقيم (d) يعامد المستوي (ABC).

ب) اعط معادلة ديكارتية للمستوي (ABC).

3. لتكن H النقطة المشتركة بين المستقيم (d) والمستوي (ABC).

أ) بين أن H مرجّح الجملة المثقلة $\{(A;-2);(B;-1);(C;2)\}$.

ب) عيّن طبيعة المجموعة Γ_1 للنقط M من الفضاء والتي تحقق: $\left(-2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}\right)\cdot\left(\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right)=0$ ، واذكر عناصرها المميّزة.

ج) عيّن طبيعة المجموعة Γ_2 للنقط M من الفضاء والتي تحقق: $\left\|-2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}\right\|=\sqrt{29}$ ، واذكر عناصرها المميّزة.

د) عيّن طبيعة المجموعة $\Gamma_1\cap\Gamma_2$ واذكر عناصرها المميّزة.

و) هل النقطة $S(-8;1;3)$ تنتمي إلى المجموعة $\Gamma_1\cap\Gamma_2$؟

التمرين 2 (5نقط)

المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$. (نأخذ $2cm$ كوحدة للأطوال)

نعتبر A وَ B النقطتين ذات اللاحقتين i وَ 2 على الترتيب.

1. أ- عيّن لاحقة النقطة B_1 صورة النقطة B بالتحاكي الذي مركزه A ونسبته $\sqrt{2}$.

ب- عيّن لاحقة النقطة B' صورة النقطة B_1 بالدوران الذي مركزه A وزاويته $\frac{\pi}{4}$.

2. ليكن f التحويل النقطي في المستوي، الذي يرفق بكل نقطة M ذات اللاحقة z النقطة M' ذات اللاحقة z' حيث: $z'=(1+i)z+1$

أ- بيّن أن صورة النقطة B هي النقطة B' بالتحويل f.

ب- بيّن أن A هي النقطة الصامد الوحيدة في التحويل f.

ج- تحقق أنه من أجل كل عدد مركّب $z \neq i$ ، $\frac{z'-z}{i-z}=-i$.

فسّر هذه النتيجة بمفهوم المسافات، ثم بمفهوم الزوايا.

3. أ- أعط الطبيعة و العناصر المميّزة للمجموعة Σ_1 للنقط M من المستوي التي لاحقتها z تحقق: $|z-2|=\sqrt{2}$.

ب- بيّن ان: $z'-3-2i=(1+i)(z-2)$.

استنتج أنه: إذا كانت M نقطة من Σ_1، فإن صورتها M' بالتحويل f تنتمي إلى دائرة Σ_2 يطلب تعيين مركزها ونصف قطرها.

ج- أرسم Σ_1 و Σ_2 في نفس الشكل مع النقط A ، B و B'.

التمرين 3 (7 نقط)

الجزء A : دراسة دالة

f الدالة العددية للمتغيّر الحقيقي x المعرّفة على المجال $[0;+\infty[$ بالدستور: $f(x)=x\ln(x+1)$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1. أ- بيّن أن الدالة f متزايدة تماما على المجال $[0;+\infty[$.

ب- هل حامل محور الفواصل يمس المنحني (C_f) عند النقطة O؟

2. نضع: $I=\int_0^1 \frac{x^2}{x+1}\,dx$.

أ- عيّن ثلاثة أعداد حقيقية a ، b و c بحيث: من أجل كل $x \neq -1$:

$$\frac{x^2}{x+1}=ax+b+\frac{c}{x+1}.$$

ب- أحسب I.

3. باستعمال التكامل بالتجزئة، وكذا نتيجة السؤال 2 ، احسب مساحة الحيّز المستوي المحدّد بالمنحني (C_f) والمستقيمات التي معادلاتها $x=0$ ، $x=1$ و $y=0$.

4. بيّن أن المعادلة $f(x)=0.25$ تقبل حلا واحداً في المجال $[0;1]$.

الجزء B : دراسة متتالية

المتتالية العددية (u_n) معرّفة على N بالعبارة $u_n=\int_0^1 x^n \ln(x+1)dx$.

1. عيّن اتجاه تغيّر المتتالية (u_n). هل المتتالية (u_n) متقاربة؟

2. بيّن أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، لدينا $0 \le u_n \le \frac{\ln 2}{n+1}$. واستنتج نهاية المتتالية (u_n).

التمرين 4 (3 نقط)

مدة صلاحية آلة إلكترونية، مقدرة بالسنوات، إلى غاية حدوث أول عطل، هو متغيّر عشوائي يتبع القانون الأسي الذي وسيطه λ حيث $\lambda>0$.

علما أن احتمال حدوث عطل للآلة إلكترونية قبل اللحظة t، هو: $p(X \le t)=\int_0^t \lambda e^{-\lambda x}dx$.

1. عيّن العدد λ مدوّرا إلى 10^{-1}، حتى يكون $p(X>6)=0.3$.

في ما تبقى من التمرين نأخذ $\lambda=0.2$

2. في أية لحظة t، يكون احتمال حدوث أول عطل للألة الإنكترونية يساوي 0.5؟

3. بيّن أن احتمال عدم تعرّض الآلة الإلكترونية للعطل خلال السنتين الأوليتين للإستعمال هو $e^{-0.4}$.

4. علما أن الآلة لم تتعرّض للعطل خلال السنتين الأوليتين، ما هو احتمال أن لا يتعرّض لأي عطل إلى غاية نهاية الستة أعوام الأولى؟

5. نعتبر مجموعة ذات 10 آلات الكترونية تعمل بطريقة مستقلّة.

احسب احتمال أن يكون ضمن هذه المجموعة من الآلات، على الأقل آلة لم تتعرض للعطل خلال السنتين الأوليتين.

تصحيح الموضوع الرابع

بكالوريا علوم تجريبية -- مـــاي 2006 -- لبنـــان

التمرين1 (5نقط)

$(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ معلم للفضاء متعامد ومتجانس. نعتبر النقط $A(2;1;3)$ ، $B(-3;-1;7)$ و $C(3;2;4)$.

1. لدينا $\overrightarrow{AB}(-5;-2;4)$ و $\overrightarrow{AC}(1;1;1)$ نفرض وجود عدد k بحيث $\overrightarrow{AB}=k\overrightarrow{AC}$

نحصل على $\begin{cases} k=-5 \\ k=-2 \\ k=4 \end{cases}$ تناقض.

منه الشعاعان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ غير مرتبطين خطياً. يعني ان النقط A ، B و C ليست على استقامة واحدة.

2. أ- شعاع توجيه المستقيم (d) هو $\vec{u}(2;-3;1)$ (هي معاملات t في عبارة التمثيل الوسيطي)

ولدينا: $\overrightarrow{AB}\cdot\vec{u}=-5(2)-2(-3)+4(1)=0$ و $\overrightarrow{AC}\cdot\vec{u}=1(2)+1(-3)+1(1)=0$

يعني أن الشعاع $\vec{u}$ يعامد مستقيمان متقاطعان (AB) و (AC) من المستوي (ABC).

إذاً: $\vec{u}$ يعامد (ABC).

ب - مما سبق لدينا $\vec{u}$ شعاع ناظم على المستوي (ABC) وبالتالي [illegible] (ABC) هو: $2x-3y+z+d=0$.

علما أن A نقطة من (ABC) ينتج: $2(2)-3(1)+3+d=0$ أي $d=-4$

منه $(ABC): 2x-3y+z-4=0$.

3. نضع: $G=\{(A;-2);(B;-1);(C;2)\}$ لدينا G نقطة من المستوي (ABC) وضوحاً.

نوجد احداثيات G ونبيّن أنها تنتمي إلى (d).

لدينا: $x_G=\dfrac{-2(2)-1(-3)+2(3)}{-2-1+2}=-5$ ، $y_G=\dfrac{-2(1)-1(-1)+2(2)}{-2-1+2}=-3$ ،

$z_G=\dfrac{-2(3)-1(7)+2(4)}{-2-1+2}=5$. إذاً: $G(-5;-3;5)$

لدينا من جهة أخرى $\begin{cases} -5=-7+2t \\ -3=-3t \\ 5=4+t \end{cases}$ يكافئ $t=1$ أي: $G\in(d)$

وبما ان (d) عمودي على (ABC)، فيقطعه في نقطة واحدة . وبالتالي $H=G$.

ب) M نقطة من الفضاء . $M\in\Gamma_1$ معناه $\left(-2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}\right)\cdot\left(\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right)=0$

يكافئ $\overrightarrow{MH}\cdot\overrightarrow{CB}=0$

Γ_1 هي المستوي الذي يشمل النقطة H وشعاعه الناظم $\overrightarrow{CB}$.

ج) M نقطة من الفضاء . $M\in\Gamma_2$ معناه $\left\|-2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}\right\|=\sqrt{29}$

يكافئ $\left\|\overrightarrow{MH}\right\|=\sqrt{29}$

Γ_2 هي سطح الكرة التي مركزها H ونصف قطرها $\sqrt{29}$.

د) بما أن Γ_2 هي سطح الكرة التي مركزها H ، Γ_1 هي المستوي الذي يشمل النقطة H فإن $\Gamma_1\cap\Gamma_2$ هي الدائرة التي مركزها H ونصف قطرها $\sqrt{29}$.

و) لدينا: $\overrightarrow{SH}(3;-4;2)$ و $\overrightarrow{CB}(-6;-3;3)$

وبما أن $\overrightarrow{SH}\cdot\overrightarrow{BC}=-18+12+6=0$ فإن $S\in\Gamma_1$

و بما أن $\left\|\overrightarrow{SH}\right\|=\sqrt{29}$ فإن $S\in\Gamma_2$

من كل هذا ينتج أن $S\in(\Gamma_1\cap\Gamma_2)$.

التمرين 2 (5نقط)

المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$.

1. أ- $B_1(z_1)$ صورة النقطة $B(2)$ بالتحاكي الذي مركزه $A(i)$ ونسبته $\sqrt{2}$

معناه $z_1-i=\sqrt{2}(2-i)$ أي $z_1=2\sqrt{2}+i(1-\sqrt{2})$

ب- $B'(z')$ صورة النقطة $B_1(z_1)$ بالدوران الذي مركزه $A(i)$ وزاويته $\dfrac{\pi}{4}$.

معناه $z'-i=e^{i\frac{\pi}{4}}\left(2\sqrt{2}+i(1-\sqrt{2})-i\right)$

أي $z'=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(1+i)\left(2\sqrt{2}+i(1-\sqrt{2})\right)+i$ أي $z'=3+2i$

1. أ- لدينا $f(M)=M'$ معناه $z'=(1+i)z+1$

إذاً: $f(B)=M'$ يكافئ $z'=(1+i)(2)+1=2i+3$

وبالتالي: $M'=B'$.

ب- M صامدة في التحويل f يكافئ $f(M)=M$ أي $z=(1+i)z+1$

يكافئ $z=i$

إذاً: النقطة الصامدة الوحيدة في التحويل f هي: A.

ج- من أجل كل عدد مركّب $z\neq i$،

$$\frac{z'-z}{i-z}=\frac{(1+i)z+1-z}{i-z}=\frac{iz+1}{i-z}=\frac{-i(i-z)}{i-z}=-i.$$

التفسير بمفهوم المسافات: لدينا $\left|\frac{z'-z}{i-z}\right|=\frac{MM'}{MA}$ أي $|-i|=\frac{MM'}{MA}$

يكافئ $\frac{MM'}{MA}=1$ أي $MM'=MA$

M' نقطة من الدائرة التي مركزها M ونصف قطرها AM.

التفسير بمفهوم الزوايا: لدينا $M\neq A$ / $(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MM'})=\arg\left(\frac{z'-z}{i-z}\right)=\arg(-i)=-\frac{\pi}{2}+2k\pi$

يعني كذلك أن M' نقطة من الدائرة التي مركزها M ونصف قطرها AM.

حيث $(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MM'})=-\frac{\pi}{2}+2k\pi$ و k عدد صحيح.

2. أ- M نقطة من المستوي التي لاحقتها z تحقق: $|z-2|=\sqrt{2}$

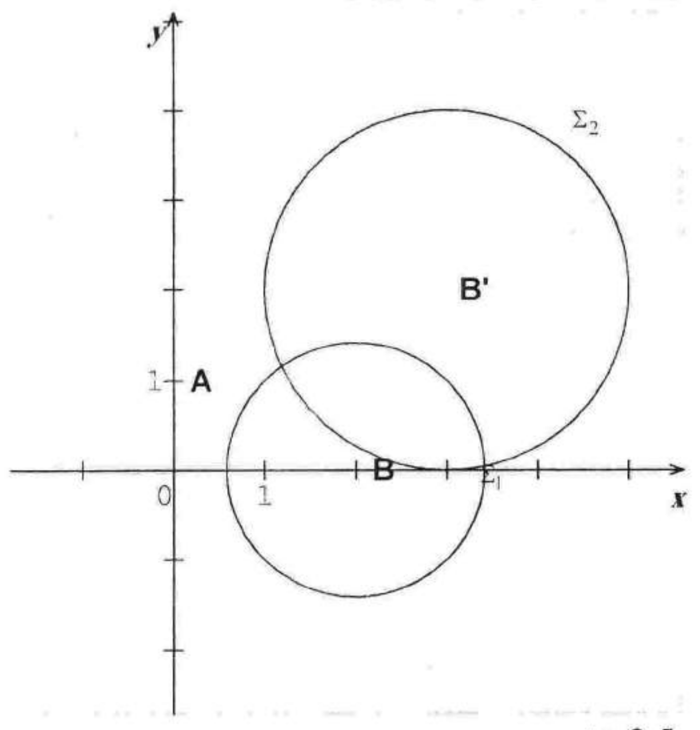
يعني أن $BM=\sqrt{2}$. إذاً: Σ_1 الدائرة التي مركزها B ونصف قطرها $\sqrt{2}$.

ب-
$$\begin{aligned}z'-3-2i&=(1+i)z+1-3-2i\\&=(1+i)z-2(1+i)\\&=(1+i)(z-2)\end{aligned}$$

ينتج أن $|z'-3-2i|=|(1+i)(z-2)|=\sqrt{2}|z-2|$.

إذاً: إذا كانت M نقطة من Σ_1، فإن $|z'-3-2i|=\sqrt{2}|z-2|=\sqrt{2}\times\sqrt{2}=2$

وبالتالي صورتها M' بالتحويل f تنتمي إلى الدائرة Σ_2 التي مركزها B' ونصف قطرها 2.



التمرين 3 (2.5 نقط)

الجزء A : **دراسة دالة**

f الدالة العددية للمتغيّر الحقيقي x المعرّفة على المجال $[0;+\infty[$ بالدستور: $f(x)=x\ln(x+1)$

1. أ- f تقبل الاشتقاق على $[0;+\infty[$ ولدينا:

$$f'(x)=(x)'\ln(x+1)+x(\ln(x+1))'=\ln(x+1)+\frac{x}{x+1}$$

من أجل كل x من $[0;+\infty[$، $\ln(x+1)\geq 0$ و $\frac{x}{x+1}\geq 0$ منه $f'(x)\geq 0$ على كامل المجال $[0;+\infty[$. أي f متزايدة تماما على $[0;+\infty[$.

ب- لدينا $f'(0)=0$ و $f(0)=0$ إذاً $y=0$ هي معادلة المماس للمنحني عند O وهي محور الفواصل.

2. أ- من أجل كل $x\neq -1$:

$$\frac{x^2}{x+1}=ax+b+\frac{c}{x+1}$$ تكافئ $$x^2=(ax+b)(x+1)+c$$

أي $x^2=ax^2+(a+b)x+b+c$ بالمطابقة نجد: $a=1$ و $b=-1$ و $c=1$

إذاً: من أجل كل $x \neq -1$: $\frac{x^2}{x+1} = x-1+\frac{1}{x+1}$

ب- $I = \int_0^1 \frac{x^2}{x+1}dx = \int_0^1\left(x-1+\frac{1}{x+1}\right)dx = \left[\frac{1}{2}x^2 - x + \ln(x+1)\right]_0^1 = -\frac{1}{2} + \ln 2$

3. الدالة f موجبة في المجال $[0;+\infty[$. ((C_f) فوق محور الفواصل) كون $x \ge 0$ وَ $\ln(x+1) \ge 0$.

إذاً الحيّز المستوي هو مجموعة النقط $M(x;y)$ من المستوي حيث: $0 \le x \le 1$ وَ $0 \le y \le f(x)$

مساحته هي: $\int_0^1 f(x)dx \quad (u.a)$

نضع: $\begin{cases} u(x) = \ln(x+1) \\ v'(x) = x \end{cases}$ ينتج أن $\begin{cases} u'(x) = \frac{1}{x+1} \\ v(x) = \frac{1}{2}x^2 \end{cases}$

وبالتالي: $\int_0^1 f(x)dx = \left[\frac{1}{2}x^2\ln(x+1)\right]_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{x^2}{x+1}dx = \frac{1}{2}\ln 2 - \frac{1}{2}I = \frac{1}{4}$

المساحة المطلوبة هي: $\frac{1}{4}(u.a)$.

4. بما أن الدالة f مستمرة ومتزايدة تماماً بالخصوص على $[0;1]$ وتأخذ قيمها في المجال $[f(0);f(1)]=[0;\ln 2]$ ($\ln 2 \approx 0.6$) فإن المعادلة $f(x) = 0.25$ تقبل حلا واحداً في المجال $[0;1]$.

الجزء B : **دراسة متتالية**

المتتالية العددية (u_n) معرّفة على N بالعبارة $u_n = \int_0^1 x^n \ln(x+1)dx$.

1. $u_{n+1} - u_n = \int_0^1 x^{n+1}\ln(x+1)dx - \int_0^1 x^n\ln(x+1)dx = \int_0^1 x^n(x-1)\ln(x+1)dx$

لدينا في المجال $[0;1]$: $x^n \ge 0$ وَ $\ln(x+1) \ge 0$ وَ $(x-1) \le 0$.

وبالتالي: $x^n(x-1)\ln(x+1) \le 0$

إذاً: $\int_0^1 x^n(x-1)\ln(x+1)dx \le 0$ أي (u_n) متناقصة تماما على N.

بما أن (u_n) متناقصة تماما على N ومحدودة من الأسفل بالعدد 0

(كون $\int_0^1 x^n\ln(x+1)dx \ge 0$) فإن (u_n) متقاربة.

2. من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n، وَ من أجل كل x من $[0;1]$، $0 \le \ln(x+1) \le \ln 2$ وكذلك $0 \le x^n\ln(x+1) \le x^n\ln 2$. ينتج أن: $0 \le \int_0^1 x^n\ln(x+1)dx \le \int_0^1 x^n\ln(2)dx$

أي $0 \le u_n \le \left[\frac{\ln(2)}{n+1}x^{n+1}\right]_0^1$ يعني أن $0 \le u_n \le \frac{\ln 2}{n+1}$

بما أن $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n+1}\right) = 0$ فحسب مبرهنة الحصر ينتج أن $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.

التمرين 4 (3 نقط)

نسمي $(\Omega;p)$ فضاء احتمالي منته.

1. احتمال حدوث عطل لآلة إلكترونية قبل اللحظة t، هو $p(X \le t) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda x}dx = 1 - e^{-\lambda t}$

$p(X > 6) = 0.3$ يكافئ $1 - p(X \le 6) = 0.3$ يكافئ $1 - \left(1 - e^{-6\lambda}\right) = 0.3$

أي $e^{-6\lambda} = 0.3$ يكافئ $-6\lambda = \ln(0.3)$ يكافئ $\lambda = -\frac{\ln(0.3)}{6} \approx 0.2$

2. اللحظة t التي يكون احتمال حدوث أول عطل للآلة الإلكترونية يساوي 0.5 تحقق:

$p(X \le t) = 0.5$ أي $1 - e^{-\lambda t} = 0.5$ يكافئ $t = -\frac{\ln(0.5)}{0.2} \approx 3.5$ (سنة)

3. احتمال عدم تعرّض الآلة الإلكترونية للعطل خلال السنتين الأوليتين للإستعمال هو $p(X > 2)$.

$p(X > 2) = 1 - p(X \le 2) = 1 - (1 - e^{-2(0.2)}) = e^{-0.4}$

4. احتمال أن لا يتعرّض الجهاز لأي عطل إلى غاية نهاية الستة أعوام الأولى، علما أن الآلة لم تتعرّض للعطل خلال السنتين الأوليتين هو: $\frac{p(X>6)}{p(X>2)} = \frac{1-p(X\le 6)}{e^{-0.4}} = \frac{e^{-1.2}}{e^{-0.4}} = e^{-0.8}$

5. نعتبر مجموعة ذات 10 آلات الكترونية تعمل بطريقة مستقلّة.

احتمال أن يكون ضمن هذه المجموعة من الآلات، على الأقل آلة لم تتعرض للعطل خلال السنتين الأوليتين هو: $1 - [p(X \le 2)]^{10}$ حيث $[p(X \le 2)]^{10}$ هو احتمال الآلات العشر تعرّضت للعطل خلال السنتين الأوليتين. ولدينا: $1 - [p(X \le 2)]^{10} = 1 - [1 - p(X > 2)]^{10} = 1 - \left[1 - e^{-0.4}\right]^{10}$.

الموضوع الخامس

بكالوريا علوم تجريبية -- جوان 2006 -- غويانا الفرنسية

التمرين 1 (3نقط)

1. مراجعة مفاهيم في الدرس

الدالة لوغاريتم نيبيري قابلة للاشتقاق على المجال $]0;+\infty[$، ودالتها المشتقة هي الدالة مقلوب ($x \mapsto \frac{1}{x}$). لدينا: $\ln 1 = 0$.

بيّن أنه من أجل كل عددين حقيقيين موجبين تماما a وَ x، $\ln(ax) = \ln(a) + \ln(x)$

2. استعمل النتيجة السابقة للبرهان على أن: $\ln\left(\frac{1}{b}\right) = -\ln(b)$ وأن

$\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$ من اجل كل عددين حقيقيين موجبين تماما a وَ b.

3. يعطى: $0.69 \le \ln 2 \le 0.70$ وَ $1.09 \le \ln 3 \le 1.10$.

استنتج حصراً لكل من الأعداد: $\ln 6$، $\ln\left(\frac{1}{6}\right)$، $\ln\left(\frac{3}{8}\right)$.

التمرين 2 (3 نقط)

في كل سؤال من الأسئلة التالية، هناك جواب واحد صحيح وواحد فقط.

المترشح يضع على ورقة الاجابة رقم السؤال والحرف الموافق للجواب الذي يراه صحيحا.

(لا يطلب أي تعليل)

في حالة الاجابة صحيحة يحصل المترشح على 0.75 .وَ في حالة الاجابة غير الصحيحة يحصل المترشح على 0.25 – .وَ غياب الاجابة يعني 0. إذا كانت مجموع علامات هذا التمرين عدد سالب فيحصل المترشح على 0.

1. عدد حلول المعادلة $e^{2x} - 3e^{x} - 4 = 0$ في R هي:

-أ-	-ب-	-ج-	-د-
0 حل	حل واحد	حلين متمايزين	أكثر من حلين

2. العبارة $-e^{-x}$

-أ-	-ب-	-ج-	-د-
موجبة تماما	دوما سالبة	سالبة فقط في حالة x موجب.	سالبة فقط في حالة x سالب.

3. $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2e^{x}-1}{e^{x}+2}\right)$ تساوي:

-أ-	-ب-	-ج-	-د-
$-\frac{1}{2}$	1	2	$+\infty$

4. مجموعة حلول المعادلة التفاضلية $y = 2y' - 1$ هي:

-أ-	-ب-	-ج-	-د-
$x \mapsto ke^{2x} - 1$ حيث: $k \in R$	$x \mapsto ke^{\frac{1}{2}x} + 1$ حيث: $k \in R$	$x \mapsto ke^{\frac{1}{2}x} - 1$ حيث: $k \in R$	$x \mapsto ke^{2x} + \frac{1}{2}$ حيث: $k \in R$

التمرين 3 (5 نقط)

الجزء A

نعتبر المتغيّر العشوائي المستمر X الذي يتبع القانون الأسي ذو الوسيط λ. نذكّر أن:

$p(X \le a) = \int_0^a \lambda e^{-\lambda t} dt$.

الشكل المعطى في نهاية التمرين يمثّل دالة الكثافة المرفقة بالقانون الأسي.

1. فسّر على الرسم الاحتمال $p(X \le 1)$.
2. عيّن على الرسم أين يقرأ مباشرة الوسيط λ.

الجزء B

نضع: $\lambda = 1.5$.

1. احسب $p(X \le 1)$ ،تعطى القيمة المظبوطة ثم قيمة مقرّبة بالزيادة إلى 10^{-3}.
2. احسب $p(X \ge 2)$.
3. استنتج من الحسابات السابقة المساواة التالية: $p(1 \le X \le 2) = 0.173...$.
4. احسب التكامل $F(x) = \int_0^x 1.5te^{-1.5t} dt$

عيّن نهاية العدد $F(x)$ عندما ينتهي x إلى $+\infty$. ثم تعرّف على الأمل الرياضي للمتغيّر العشوائي X.

الجــــزء C

آلة تصنع اسطوانات . نقيس الانحراف (بعُشر المليمتر) بين قطر الاسطوانات وقيمة تعديل الآلة.
نفرض ان هذا الانحراف يتبع القانون الأسي ذو الوسيط $\lambda = 1.5$.
إذا كان الانحراف أقل من 1 ،فإن الاسطوانة مقبولة. إذا كان الانحراف محصور بين 1 و 2 نقوم بتعديل يسمح بقبول الاسطوانات بنسبة 80% من الحالات. إذا كان الانحراف أكبر من 2 فإن الاسطوانة مرفوضة.

1. نأخذ عشوائيا اسطوانة واحدة من المنتوج.

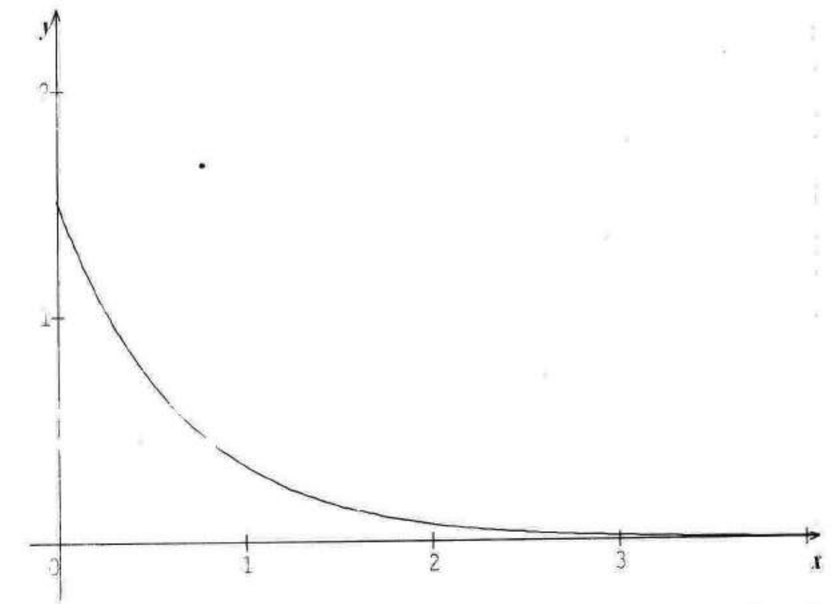
أ- بيّن أن احتمال أن تكون مقبولة يساوي 0.915 مقرّب إلى 10^{-3}.

ب- علما أنها مقبولة، ما احتمال أن تكون قد خضعت للتعديل؟

2. نأخذ بطريقة مستقلّة عشر اسطوانات من المنتوج.نفرض أن منتوج الاسطوانات كبير يسمح بتشبيه هذا السحب بسحب على التوالي مع الارجاع.

أ- ما احتمال أن تكون الاسطوانات العشر مقبولة.

ب- ما احتمال أن ترفض على الأقل اسطوانة ؟



التمرين 4 (5 نقط)

1. المستوي المركّب مزوّد بالمعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$. نعتبر النقط:
A ذات اللاحقة a حيث $a \in R$ ، B ذات اللاحقة $b+i$ حيث $b \in R$
C صورة B بالدوران الذي مركزه A وزاويته $\frac{\pi}{3}$.

أ- عيّن علاقة بين a وَ b بحيث النقطة C تقع على المحور $(O;\vec{v})$.

ب- عبّر إذاً عن لاحقة C بدلالة a.

2. في هذا السؤال نضع: $a = \sqrt{3}$ و $b = 0$.نعتبر النقطتين C ذات اللاحقة $c = -i$ وَ D ذات اللاحقة $d = 2 + \sqrt{3} - 2i\sqrt{3}$.

أ- ما هي طبيعة المثلث ABC.

ب- احسب النسبة $\frac{d-a}{c-a}$، ماذا يمكننا أن نستنتج عن المثلث ACD ؟

ج- عيّن لاحقة النقطة E صورة D بالدوران الذي مركزه A وزاويته $\frac{\pi}{3}$.

د- عيّن لاحقة النقطة F صورة D بالانسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{AC}$.

و- عيّن طبيعة المثلث BEF.

التمرين 5 (5 نقط)

الجــــزء I

نعتبر متتاليتين للنقط. A_n وَ B_n المعرّفتين من أجل كل عدد طبيعي n بالطريقة التالية:
على المحور $(O;\vec{u})$ معطى في نهاية التمرين، النقطة A_0 فاصلتها 0، والنقطة B_0 فاصلتها 12.
النقطة A_{n+1} هي مرجّح الجملة $\{(A_n;2);(B_n;1)\}$، النقطة B_{n+1} هي مرجّح الجملة $\{(A_n;1);(B_n;3)\}$.

1. ضع على الرسم النقطتين A_2 وَ B_2.

2. نعرّف المتتاليتين العدديين (a_n) وَ (b_n) لفواصل النقطتين A_n وَ B_n على الترتيب
بيّن أن: $a_{n+1} = \frac{2a_n + b_n}{3}$. ثم أن: $b_{n+1} = \frac{a_n + 3b_n}{4}$

الجــــزء II

1. نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرّفة من أجل كل عدد طبيعي n، بــ: $u_n = b_n - a_n$

أ- بيّن أن المتتالية (u_n) هندسية يطلب تعين أساسها.

ب- أعط عبارة u_n بدلالة n.

ج- احسب نهاية (u_n). ترجم هندسيا النتيجة.

2. أ- بيّن أن المتتالية (a_n) متزايدة (يمكننا استعمال إشارة u_n)

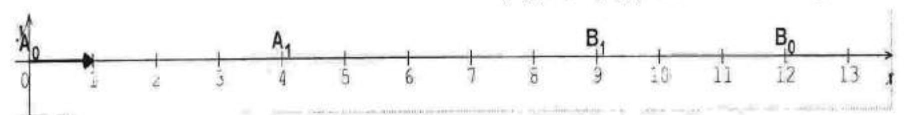
ب- ادرس اتجاه تغيّر المتتالية (b_n).

3. ماذا يمكننا أن نستنتج مما سبق فيما يتعلّق بتقارب المتتاليتين (a_n) وَ (b_n)؟

الجـــزءIII

نعتبر المتتالية العددية (v_n) المعرّفة من أجل كل عدد طبيعي n، بـــ: $v_n = 4b_n + 3a_n$.

1. بيّن أن المتتالية (v_n) ثابتة.
2. عيّن نهايات المتتاليتين (a_n) وَ (b_n).



تصحيح الموضوع الخامس

بكالوريا علوم تجريبية -- جـــوان 2006 -- غويانا الفرنسية

التمرين1 (3نقط)

1. مراجعة مفاهيم في الدرس

أ- نعتبر الدالة f المعرّفة على المجال $]0;+\infty[$ بالدستور: $f(x)=\ln(ax)-\ln(x)$

حيث a عدد حقيقي موجب تماما.

لدينا من أجل كل x من المجال $]0;+\infty[$، $f'(x)=\frac{a}{ax}-\frac{1}{x}=0$.

ينتج من هذا أن الدالة f ثابتة. أي من أجل كل x من المجال $]0;+\infty[$، $f(x)$ ثابت بالنسبة لـــ x.

وبما ان $f(1)=\ln(a)-\ln(1)=\ln(a)$ فإن $f(x)=\ln(a)$ من أجل كل x من المجال $]0;+\infty[$.

أي $\ln(ax)-\ln(x)=\ln(a)$. بعبارة أخرى، من أجل كل x وَ a من المجال $]0;+\infty[$،

$$\ln(ax)=\ln(a)+\ln(x)$$

2. من اجل كل عددين حقيقيين موجبين تماماً a وَ b لدينا:

$\ln\left(\frac{1}{b}\right)+\ln(b)=\ln\left(\frac{1}{b}\times b\right)=\ln(1)=0$ أي $\ln\left(\frac{1}{b}\right)=-\ln(b)$

وَ $\ln\left(\frac{a}{b}\right)=\ln\left(a\times\frac{1}{b}\right)=\ln(a)+\ln\left(\frac{1}{b}\right)=\ln(a)-\ln(b)$

3. علما أن: $0.69\le\ln 2\le 0.70$ وَ $1.09\le\ln 3\le 1.10$.

ينتج أن: $0.69+1.09\le\ln 2+\ln 3\le 0.70+1.10$ أي $1.78\le\ln 6\le 1.80$

وكذلك $-1.80\le-\ln 6\le-1.78$ أي $-1.80\le\ln\left(\frac{1}{6}\right)\le-1.78$

ولدينا: $\ln 8=\ln(2)^3=3\ln 2$ إذاً: $3\times 0.69\le 3\ln 2\le 3\times 0.70$

أي: $2.07\le\ln 8\le 2.10$. و بالتالي: $-2.10\le-\ln 8\le-2.07$

إذاً: $1.09-2.10\le\ln 3-\ln 8\le 1.10-2.07$. يعني أن $-1.01\le\ln\left(\frac{3}{8}\right)\le-0.97$

التمرين 2 (3 نقط)

1. المعادلة $e^{2x}-3e^x-4=0$ في R حلا واحداً (الاجابة — ب -) ذلك لأن:

$e^{2x}-3e^x-4=0$ تكافئ $\begin{cases}y=e^x\\ y^2-3y-4=0\end{cases}$ تكافئ $\begin{cases}y=e^x\\ y=-1 \text{ أو } y=4\end{cases}$

تكافئ $e^x=4$ أي $x=\ln 4$.

2. العبارة $-e^{-x}$ دوما سالبة تماما (الاجابة — ب -) ذلك لأن:

e^{-x} موجب تماما من أجل كل x من R.

3. $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2e^x-1}{e^x+2}\right)=2$ (الاجابة — ج -) ذلك لأن:

$\frac{2e^x-1}{e^x+2}=\frac{e^x\left(2-e^{-x}\right)}{e^x\left(1+2e^{-x}\right)}=\frac{2-e^{-x}}{1+2e^{-x}}$ وَ $\lim_{x\to+\infty}\left(e^{-x}\right)=0$

4. مجموعة حلول المعادلة التفاضلية $y=2y'-1$ هي: $x\mapsto ke^{\frac{1}{2}x}-1$ حيث: $k\in R$

(الاجابة — ج -) ذلك لأن:

$y=2y'-1$ تكافئ $y'=\frac{1}{2}y+\frac{1}{2}$ أي $(y+1)'=\frac{1}{2}(y+1)$

التمرين 3 (5 نقط)

الجزء A

X المتغيّر العشوائي المستمر X الذي يتبع القانون الأسي ذو الوسيط λ.

إذاً: $p(X\le a)=\int_0^a \lambda e^{-\lambda t}dt=1-e^{-\lambda a}$.

1. الاحتمال $p(X\le 1)$ يمثّل هندسيا، مساحة الحيّز المستوي المحدد بمنحني دالة الكثافة والمستقيمات التي معادلاتها: $x=0$، $x=1$ و $y=0$.

2. دالة الكثافة هي: $f: x\mapsto \lambda e^{-\lambda x}$ معرّفة على المجال $[0;+\infty[$، ولدينا $\lambda=f(0)$.

إذاً: الوسيط λ هو ترتيب نقطة تقاطع منحني دالة الكثافة مع محور التراتيب.

الجزء B نضع: $\lambda=1.5$.

1. $p(X\le 1)=\int_0^1 1.5e^{-1.5x}dx=1-e^{-1.5}\approx 0.777$.

2. $p(X\ge 2)=1-p(X<2)=e^{-1.5\times 2}=e^{-3}$.

3. لدينا: $p(1\le X\le 2)=p(X\le 2)-p(X\le 1)$

إذاً: $p(1\le X\le 2)=\left(1-e^{-3}\right)-\left(1-e^{-1.5}\right)=e^{-1.5}-e^{-3}=0.173...$

4. لحساب $F(x)=\int_0^x 1.5te^{-1.5t}dt$ نستعمل التكامل بالتجزئة.

نضع: $\begin{cases}u(t)=t\\ v'(t)=1.5e^{-1.5t}\end{cases}$ ينتج أن $\begin{cases}u'(t)=1\\ v(t)=-e^{-1.5t}\end{cases}$ وبالتالي:

$$F(x)=\int_0^x 1.5te^{-1.5t}dt=\left[-te^{-1.5t}\right]_0^x-\int_0^x -e^{-1.5t}dt=-xe^{-1.5x}-\left[\frac{1}{1.5}e^{-1.5t}\right]_0^x$$

$$=-xe^{-1.5x}-\frac{1}{1.5}e^{-1.5x}+\frac{1}{1.5}$$

$\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=\frac{1}{1.5}$ كون: $\lim\limits_{x\to+\infty}-xe^{-x}=0$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{-x}=0$

إذاً: الأمل الرياضي للمتغيّر العشوائي X هو $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=\frac{1}{1.5}$ أي: $E(X)=\frac{1}{1.5}$

الجزء C

الانحراف هو المتغيّر العشوائي X يتبع القانون الأسي ذو الوسيط $\lambda=1.5$.

1. أ- احتمال أن تكون الاسطوانة مقبولة هو:

$$p_1=p(X\le 1)+0.8\times p(1\le X\le 2)\approx 0.777+0.8\times 0.173\approx 0.915$$

ب- احتمال أن تكون قد خضعت للتعديل علما أنها مقبولة هو:

$$\frac{0.8\times p(1\le X\le 2)}{p(X\le 1)+0.8\times P(1\le X\le 2)}\approx\frac{0.8\times 0.173}{0.915}\approx 0.151$$

2. أ- احتمال أن تكون الاسطوانات العشر مقبولة هو: $(p_1)^{10}$.

ب- احتمال أن ترفض على الأقل اسطوانة هو: $1-(p_1)^{10}$.

التمرين 4 (5 نقط)

1. المستوي المركّب مزوّد بالمعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$.

أ- بما أن C صورة B بالدوران الذي مركزه A وزاويته $\frac{\pi}{3}$ فإن لاحقة C هي:

$e^{i\frac{\pi}{3}}(b+i-a)+a$. ولدينا:

$$e^{i\frac{\pi}{3}}(b+i-a)+a=\frac{1}{2}(1+i\sqrt{3})(b-i+a)+a=\frac{1}{2}(b+a-\sqrt{3})+\frac{1}{2}i((b-a)\sqrt{3}+1)$$

C تقع على المحور $(O;\vec{v})$ يكافئ $\frac{1}{2}(b+a-\sqrt{3})=0$ أي $b+a=\sqrt{3}$

ب- إذاً: z_C لاحقة C تكتب بدلالة a كما يلي:

$$z_C=\frac{1}{2}(0)+\frac{1}{2}i((\sqrt{3}-a-a)\sqrt{3}+1)=(2-a\sqrt{3})i$$

2. لدينا: $a=\sqrt{3}$ و $b=0$

أ- المثلث ABC متقايس الأضلاع. ذلك لأن: $A(\sqrt{3})$ و $B(i)$ و $C(-i)$

أي: $AB=AC=BC=2$

ب- $\frac{d-a}{c-a}=\frac{2+\sqrt{3}-2i\sqrt{3}-\sqrt{3}}{-i-\sqrt{3}}=2i$. ينتج من هذا أن:

$$(\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AD})=\arg\left(\frac{d-a}{c-a}\right)=\arg(2i)=\frac{\pi}{2}+2k\pi \quad / \ k \text{ عدد صحيح}$$

يعني أن المثلث ACD قائم الزاوية في A.

ج- بما أن E صورة D بالدوران الذي مركزه A وزاويته $\frac{\pi}{3}$ فإن لاحقة E هي: $e^{i\frac{\pi}{3}}(d-a)+a$. ولدينا:

$$e^{i\frac{\pi}{3}}(d-a)+a=\frac{1}{2}\left(1+i\sqrt{3}\right)\left(2+\sqrt{3}-2i\sqrt{3}-\sqrt{3}\right)+\sqrt{3}=4+\sqrt{3}$$

د- بما أن F صورة D بالانسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{AC}$ فإن لاحقة F هي:

$$2+\sqrt{3}-2i\sqrt{3}+\left(-i-\sqrt{3}\right)=2-i\left(1+2\sqrt{3}\right)$$

و- BEF متقايس الأضلاع. ذلك لأن: $BF^2=BE^2=EF^2=20+8\sqrt{3}$.

التمرين 5 (5 نقط)

الجزء I

1. A_2 هي مرجّح الجملة $\{(A_1;2);(B_1;1)\}$ أي $\overrightarrow{A_2A_1}=\frac{1}{3}\overrightarrow{B_1A_1}$.

B_2 هي مرجّح الجملة $\{(A_1;1);(B_1;3)\}$ أي $\overrightarrow{B_2A_1}=\frac{3}{4}\overrightarrow{B_1A_1}$

A0 0 1 2 3 A1 4 5 A2 6 7 B2 8 B1 9 10 11 B0 12 x y

2. لدينا A_{n+1} هي مرجّح الجملة $\{(A_n;2);(B_n;1)\}$ إذاً: $x_{A_{n+1}}=\frac{2\times x_{A_n}+1\times x_{B_n}}{2+1}$

أي: $a_{n+1}=\frac{2a_n+b_n}{3}$

لدينا B_{n+1} هي مرجّح الجملة $\{(A_n;1);(B_n;3)\}$ إذاً: $x_{B_{n+1}}=\frac{1\times x_{A_n}+3\times x_{B_n}}{1+3}$

أي: $b_{n+1}=\frac{a_n+3b_n}{4}$

الجزء II

1. نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرّفة من أجل كل عدد طبيعي n، بـ: $u_n=b_n-a_n$.

أ- $u_{n+1}=b_{n+1}-a_{n+1}=\frac{a_n+b_n}{4}-\frac{2a_n+b_n}{3}=\frac{15}{12}(b_n-a_n)=\frac{15}{12}u_n$

يعني أن (u_n) هندسية أساسها $\frac{15}{12}$.

ب- من أجل كل عدد طبيعي n، $u_n=\left(\frac{15}{12}\right)^n\times u_0=12\left(\frac{15}{12}\right)^n$

ج- $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\lim\limits_{n\to+\infty}12\left(\frac{15}{12}\right)^n=0$ كون $-1<\frac{15}{12}<1$

2. أ- $a_{n+1}-a_n=\frac{2a_n+b_n}{3}-a_n=\frac{b_n-a_n}{3}=\frac{u_n}{3}>0$

يعني أن المتتالية (a_n) متزايدة تماما.

ب- $b_{n+1}-b_n=\frac{a_n+3b_n}{4}-b_n=\frac{a_n-b_n}{4}=-\frac{u_n}{4}>0$

يعني أن المتتالية (b_n) متناقصة تماما.

3. حسب ما سبق بيّنا أن (a_n) متزايدة تماما وَ (b_n) متناقصة تماما وَ $\lim\limits_{n\to+\infty}(b_n-a_n)=0$.

هذا يعني أن المتتاليتين (a_n) وَ (b_n) متجاورتين. وبالتالي متقاربتان نحو نفس العدد l .

الجزء III

نعتبر المتتالية العددية (v_n) المعرّفة من أجل كل عدد طبيعي n، بـ: $v_n=4b_n+3a_n$.

1. من أجل كل عدد طبيعي n

$$v_{n+1}-v_n=(4b_{n+1}+3a_{n+1})-(4b_n+3a_n)=4\frac{a_n+3b_n}{4}+3\frac{2a_n+b_n}{3}-4b_n-3a_n=0$$

يعني أن المتتالية (v_n) ثابتة.

2. بما أن (v_n) ثابتة فإن: $v_n=v_0=4b_0+3a_0=48$

وبالتالي: $\lim\limits_{n\to+\infty}v_n=48$ أي $\lim\limits_{n\to+\infty}(4b_n+3a_n)=48$.

يعني أن $4l+3l=48$ يكافئ $l=\frac{48}{7}$.

إذاً: $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=\lim\limits_{n\to+\infty}b_n=\frac{48}{7}$.

الموضوع السادس

بكالوريا علوم تجريبية ---- جوان 2006 ---- فرنسا

التمرين 1 (4نقط)

$(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ معلم للفضاء متعامد ومتجانس. نعتبر النقط $A(2;4;1)$، $B(0;4;-3)$، $C(3;1;-3)$، $D(1;0;-2)$، $E(3;2;-1)$، $I\left(\frac{3}{5};4;-\frac{9}{5}\right)$.

أذكر إن كانت صحيحة أم خاطئة كلا من العبارات التالية. (دون التعليل)

1. معادلة المستوي (ABC) هي: $2x+2y-z-11=0$.
2. النقطة E هي المسقط العمودي للنقطة D على المستوي (ABC).
3. المستقيمان (AB) و(CD) متعامدان.
4. المستقيم (CD) يتعيّن بالتمثيل الوسيطي التالي: $(CD):\begin{cases} x=-1+2t \\ y=-1+t \\ z=1-t \end{cases} / \ t\in\mathbb{R}$
5. المستقيم (AB) يشمل النقطة I.

التمرين 2 (5نقط)

1. f الدالة المعرّفة على $\mathbb{R}$ بالدستور: $f(x)=x^2e^{1-x}$

نسمي (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$. وحدة الرسم $2cm$.

أ) عيّن نهايات f عند $+\infty$ ثم عند $-\infty$، ما هي النتيجة الهندسية التي يمكن استخلاصها بالنسبة للمنحني (C_f)؟

ب) علّل قابلية اشتقاق الدالة f على $\mathbb{R}$، ثم عيّن دالتها المشتقة f'.

ج) ارسم جدول تغيرات الدالة f، وانشئ المنحني (C_f).

2. n عدد طبيعي غير معدوم، نعتبر التكامل I_n المعرّف كما يلي: $I_n=\int_0^1 x^n e^{1-x}dx$.

أ) أوجد علاقة بين I_{n+1} وI_n.

ب) أحسب I_1 ثم I_2.

ت) أعط تفسيراً هندسياً للعدد I_2. نظهر ذلك في الرسم السابق للمنحني (C_f).

3. أ) بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[0;1]$ ومن أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n، لدينا المتباينة المضاعفة: $x^n\le x^ne^{1-x}\le x^ne$.

ب) استنتج حصراً للعدد I_n، ثم نهاية I_n عندما ينتهي n إلى $+\infty$.

التمرين 3 (5 نقط)

نعتبر المستوي المركّب (P) المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$.

في كل التمرين، الرمز $(P)/\{O\}$ يشير إلى المستوي (P) باستثناء نقطة المبدأ O.

1. سؤال الدرس

نذكّر بالنتيجتين التاليتين:

- إذا كان z و z' عددان مركّبان غير معدومين فإن:

$\arg(zz')=\arg(z)+\arg(z')+2k\pi$ / k عدد صحيح.

- من أجل كل شعاع $\vec{w}$ غير معدوم لاحقته z لدينا: $\arg(z)=(\vec{u};\vec{w})+2k\pi$ / k عدد صحيح.

أ) z و z' عددان مركّبان غير معدومين، بيّن أن: $\arg\left(\frac{z}{z'}\right)=\arg(z)-\arg(z')+2k\pi$ / k عدد صحيح.

ب) بيّن أنه: إذا كانت A، B و C ثلاثة نقط من المستوي متمايزة مثنى مثنى ولواحقها على الترتيب a، b و c فإن: $\arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right)=(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})+2k\pi$ / k عدد صحيح.

2. نعتبر الدالة f من $(P)/\{O\}$ نحو $(P)/\{O\}$ والتي ترفق بكل نقطة M ذات اللاحقة z النقطة M' ذات اللاحقة z' حيث: $z'=\frac{1}{z}$.

نسمي U و V النقطتان من المستوي لاحقتهما 1 و i على الترتيب.

أ) بيّن أنه من أجل $z\neq 0$، لدينا: $\arg(z')=\arg(z)+2k\pi$ / k عدد صحيح.

استنتج أنه من أجل كل نقطة M من $(P)/\{O\}$، النقطتان M و $M'=f(M)$ تنتميان إلى نفس النصف مستقيم الذي مبدؤه O.

ب) عيّن مجموعة النقط M من $(P)/\{O\}$ حيث: $M=f(M)$.

ج) M نقطة من المستوي (P) تختلف عن O، U و V. نقبل أن M' بدورها تختلف عن O، U و V.

تحقق من المساواة المضاعفة: $\frac{z'-1}{z'-i}=\frac{1}{i}\left(\frac{\bar{z}-1}{\bar{z}+i}\right)=-i\overline{\left(\frac{z-1}{z-i}\right)}$ واستنتج علاقة بين: $\arg\left(\frac{z'-1}{z'-i}\right)$ وَ $\arg\left(\frac{z-1}{z-i}\right)$.

3. أ) ليكن z العدد المركّب حيث $z\neq 1$ وَ $z\neq i$ وَ لتكن M النقطة ذات اللاحقة z .

بيّن أن : M نقطة من المستقيم (UV) باستثناء U وَ V **إذا وفقط إذا** كان $\frac{z-1}{z-i}$ عدد حقيقي غير معدوم.

ب) عيّن صورة المستقيم (UV) باستثناء U وَ V بالدالة f .

التمرين 4 (5 نقط)

1. في لعبة القنص. يقوم قناص بإجراء طلاقات متتالية صوب كرة هوائية لثقبها.
علما أن احتمال ثقب الكرة في كل طلقة هو 0.2 .
يتوقف اللاعب عندما تثقب الكرة. (نفرض أن الطلاقات المتتالية مستقلّة).

أ) ما احتمال أن تبقى الكرة سالمة في نهاية الطلقة الثانية؟

ب) ما احتمال أن تكون طلقتان كافيتان لثقب الكرة؟

ج) ما الاحتمال p_n أن تكون n طلقة كافية لثقب الكرة؟

د) من أجل أي قيم للعدد الطبيعي n يكون لدينا $p_n>0.99$ ؟

2. يشارك هذا القناص في اللعبة التالية. يرمي أولا نرداً رباعي الوجوه منتظم رقّمت أوجهه الأربعة من1 إلى 4 (الوجه الذي نحصل عليه عند الإلقاء هو الوجه القاعدة).
ليكن k رقم الوجه المحصّل عليه. يتوجه اللاعب إلى حلبة القنص ولديه الحق في القيام بـ k طلقة لثقب الكرة.

بيّن أنه إذا كان النرد جيد التوازن، فإن احتمال ثقب الكرة هو 0.4096
(يمكنك استعمال شجرة الاحتمالات).

3. اللاعب يرغب في التأكد من أن النرد فعلا متوازن، لذلك قام بإلقاء هذا النرد 200 مرة وسجّلت النتائج في الجدول التالي:

الوجه k	1	2	3	4
عدد مرات ظهور الوجه الذي يحمل الرقم k	58	49	52	41

أ) أحسب التواتر f_k للمخارج الملاحظة لكل وجه.

ب) نضع: $d^2=\sum_{k=1}^{4}\left(f_k-\frac{1}{4}\right)^2$. أحسب d^2 .

ت) نجري الآن 1000 محاكاة لـ 200 رمية لزهرة النرد المتقنة التوازن، ونحسب من أجل كل محاكاة العدد d^2 .

فنحصل على سلسلة إحصائية ذات 1000 قيمة للعدد d^2 ، مرتبة في الجدول التالي:

min	D_1	Q_1	med	Q_3	D_9	max
0.00124	0.00192	0.00235	0.00281	0.00345	0.00452	0.01015

بمجازفة مقدارها 10%، هل يمكن اعتبار أن هذا النرد غير متوازن؟

تصحيح الموضوع السادس

بكالوريا علوم تجريبية ---- جوان 2006 ---- فرنسا

التمرين1 (4نقط)

1. العبارة **صحيحة**. ذلك لأن:

$2(2)+2(4)-1-11=0$ محقّقة، يعني أن A نقطة من المستوي الذي معادلته $2x+2y-z-11=0$. نتحقق بنفس الكيفية أن B وَ C نقطتان من هذا المستوي.

ولدينا: $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-2\\0\\-4\end{pmatrix}$ وَ $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}1\\-3\\-4\end{pmatrix}$ غير مرتبطين خطياً (كون $1\times0-2\times3\neq0$)

أي النقط الثلاث A ، B وَ C ليست على استقامة واحدة.

2. العبارة **خاطئة**. ذلك لأن: $2(3)+2(2)+1-11=0$ محقّقة، يعني أن E نقطة من المستوي (ABC) ، ولكن الشعاع $\overrightarrow{DE}$ لا يعامد $\overrightarrow{AB}$

كون $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-2\\0\\-4\end{pmatrix}$ وَ $\overrightarrow{DE}\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}$ وَ $\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{AB}=-4+0-4\neq0$

3. العبارة **صحيحة**. ذلك لأن: $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}-2\\-1\\1\end{pmatrix}$ وَ $\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{AB}=4+0-4=0$

أي $\overrightarrow{CD} \perp \overrightarrow{AB}$.

4. العبارة **خاطئة**. ذلك لأن:

النقطة C لا تحقق الجملة $(CL):\begin{cases} x=-1+2t \\ y=-1+t \\ z=1-t \end{cases}$ أي: $\begin{cases} 3=-1+2t \\ 1=-1+t \\ -3=1-t \end{cases}$ تعطي الجملة $\begin{cases} t=2 \\ t=2 \\ t=4 \end{cases}$ تناقض.

5. العبارة **صحيحة**. ذلك لأن:

لدينا: $\overrightarrow{AI}\begin{pmatrix} -\frac{7}{5} \\ 0 \\ -\frac{14}{5} \end{pmatrix}$ و $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$ وبالتالي $\overrightarrow{AB}=\frac{10}{7}\overrightarrow{AI}$ أي الشعاعان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AI}$ مرتبطان خطياً.

التمرين 2 (5نقط)

1. f الدالة المعرّفة على R بالدستور: $f(x)=x^2 e^{1-x}$

أ) $\lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$ كون $\lim_{x\to-\infty} x^2=+\infty$ و $\lim_{X\to+\infty} e^X=+\infty$

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=0^+$ كون $f(x)=x^2 e^{1-x}=e\frac{x^2}{e^x}$ و $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^2}=+\infty$

إذاً: $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{e^x}=0^+$

نستنتج أن حامل محور الفواصل هو مستقيم مقارب للمنحني (C_f) بجوار $+\infty$.

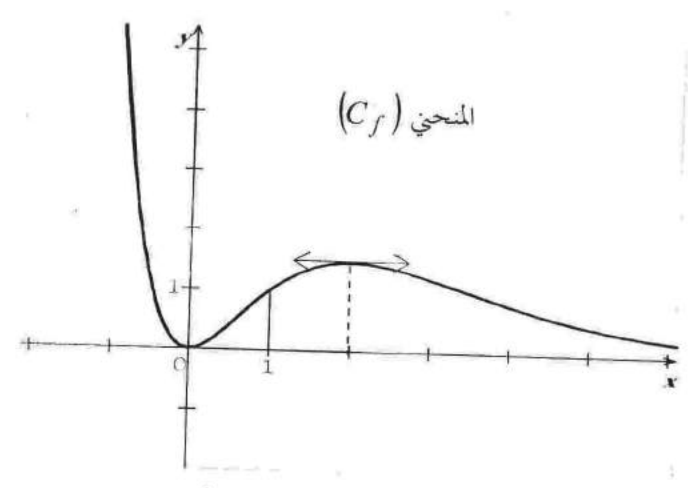
ب) الدالة f قابلة للإشتقاق على R باعتبارها مركّب وجدا لدوال قابلة للإشتقاق على R.

من أجل كل x من R، $f'(x)=2xe^{1-x}-x^2e^{1-x}=x(2-x)e^{1-x}$

ج) من أجل كل x من R، $e^{1-x}>0$. إذاً إشارة $f'(x)$ من إشارة العدد $x(2-x)$ الذي جذراه 0 و 2 وهو موجب في المجال $[0;2]$ وسالب في الخارج.

إذاً جدول التغيرات يعطى كما يلي:

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	0	↗	$\frac{4}{e}$	↘	0



2. أ) من أجل n عدد طبيعي غير معدوم، $I_{n+1}=\int_0^1 x^{n+1}e^{1-x}dx$ نكامل بالتجزئة

نضع: $\begin{cases} u_{n+1}(x)=x^{n+1} \\ v'(x)=e^{1-x} \end{cases}$ إذاً: $\begin{cases} u'_{n+1}(x)=(n+1)x^n \\ v(x)=-e^{1-x} \end{cases}$

وبالتالي: $I_{n+1}=[u_{n+1}(x)\times v(x)]_0^1-\int_0^1 u'_{n+1}(x)\times v(x)dx$

منه $I_{n+1}=\left[-x^{n+1}e^{1-x}\right]_0^1+\int_0^1(n+1)x^n e^{1-x}dx$. إذاً: $I_{n+1}=(n+1)I_n-1$

$=-1+(n+1)I_n$

ب) لحساب $I_1=\int_0^1 xe^{1-x}dx$ نتّبع نفس طريقة التكامل بالتجزئة في الحالة الخاصة $n=1$

نجد: $I_1=\left[-xe^{1-x}\right]_0^1+\int_0^1 e^{1-x}dx=e-2$. و بتطبيق العلاقة السابقة

نجد: $I_2=(1+1)I_1-1=2(e-2)-1=2e-5$

ج) $I_2=\int_0^1 x^2e^{1-x}dx=\int_0^1 f(x)dx$ و بما أن الدالة f موجبة فإن I_2 يمثّل ربع مساحة الحيّز المستوي المحدّد بالمنحني (C_f) والمستقيمات التي معادلتها: $y=0$ ، $x=0$ و $x=1$ ؛

3. أ) من أجل كل x من المجال $[0;1]$، $0\le x\le 1$ يكافئ $-1\le -x\le 0$

أي $0\le 1-x\le 1$ يكافئ $1\le e^{1-x}\le e$ كون الدالة الأسية متزايدة

يكافئ $x^n\le x^ne^{1-x}\le x^ne$ كون x^n موجب على $[0;1]$.

ب) لدينا من أجل كل x من المجال $[0;1]$، $x^n \le x^n e^{1-x} \le x^n e$ وحسب خاصة التكامل ينتج: $\int_0^1 x^n dx \le \int_0^1 x^n e^{1-x} dx \le \int_0^1 e\, x^n dx$

أي $\left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 \le I_n \le e\left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1$ منه $\frac{1}{n+1} \le I_n \le \frac{e}{n+1}$

عندما ينتهي n إلى $+\infty$ فإن العددان $\frac{e}{n+1}$ وَ $\frac{1}{n+1}$ ينتهيان إلى 0

وبالتالي $\lim_{n\to+\infty} I_n = 0$ حسب مبرهنة الحصر.

التمرين 3 (5 نقط)

1. أ) z عدد مركّب غير معدوم. لدينا $z\times\frac{1}{z}=1$

$$\arg\left(z\times\frac{1}{z}\right)=\arg(z)+\arg(\frac{1}{z})=\arg(1)=0+2k\pi$$

منه: $\arg\left(\frac{1}{z}\right)=-\arg(z)+2k\pi$ / k عدد صحيح.

وبالتالي من أجل كل عددين مركّبين غير معدومين z وَ z'.

لدينا: $\arg\left(\frac{z}{z'}\right)=\arg\left(z\times\frac{1}{z'}\right)=\arg(z)+\arg\left(\frac{1}{z'}\right)=\arg(z)-\arg(z')+2k\pi$ / k عدد صحيح.

ب) A ، B وَ C ثلاثة نقط من المستوي متمايزة مثنى مثنى ولواحقها على الترتيب a ، b و c

$\arg\frac{c-a}{b-a}=\arg(c-a)-\arg(b-a)=(\vec{u};\overrightarrow{AC})-(\vec{u};\overrightarrow{AB})=(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})+2k\pi$ / k عدد صحيح.

(باستعمال علاقة شال).

2. f الدالة من $(P)/\{O\}$ نحو $(P)/\{O\}$ والتي ترفق بكل نقطة M ذات اللاحقة z النقطة M' ذات اللاحقة z' حيث: $z'=\frac{1}{\bar{z}}$.

أ) من أجل $z\ne 0$ ، لدينا: $\arg(z')=\arg\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)+2k\pi$

منه $\arg(z')=-\arg(\bar{z})=\arg(z)+2k\pi$ / k عدد صحيح.

من العلاقة الأخيرة ينتج أن: $(\vec{u};\overrightarrow{OM'})=(\vec{u};\overrightarrow{OM})+2k\pi$ هذا يعني أن للشعاعين

$\overrightarrow{OM}$ و $\overrightarrow{OM'}$ نفس الاتجاه.

أي النقطتان M وَ $M'=f(M)$ تنتميان إلى نفس النصف مستقيم الذي مبدؤه O.

ب) من أجل كل نقطة M من $(P)/\{O\}$، $M=f(M)$ معناه $z=\frac{1}{\bar{z}}$ أي $z\bar{z}=1$

معناه $|z|^2=1$ يكافئ $|z|=1$

إذاً مجموعة النقط الصامدة في التحويل f هي الدائرة التي مركزها O ونصف قطرها 1.

ج) من أجل $z\ne 0$ ، لدينا:

$$\frac{z'-1}{z'-i}=\frac{\frac{1}{\bar{z}}-1}{\frac{1}{\bar{z}}-i}=\frac{1-\bar{z}}{1-i\bar{z}}=\frac{1-\bar{z}}{i(-i-\bar{z})}=\frac{1}{i}\left(\frac{\bar{z}-1}{\bar{z}+i}\right)=\frac{1}{i}\,\overline{\frac{z-1}{z-i}}=-i\overline{\left(\frac{z-1}{z-i}\right)}$$

إذاً $\frac{z'-1}{z'-i}=-i\overline{\left(\frac{z-1}{z-i}\right)}$. ينتج من هذه العلاقة أن:

$\arg\left(\frac{z'-1}{z'-i}\right)=\arg(-i)+\arg\overline{\left(\frac{z-1}{z-i}\right)}+2k\pi$ / k عدد صحيح.

أي $\arg\left(\frac{z'-1}{z'-i}\right)=-\frac{\pi}{2}-\arg\left(\frac{z-1}{z-i}\right)+2k\pi$ / k عدد صحيح. وهي العلاقة المطلوبة.

3. أ) z العدد المركّب حيث $z\ne 1$ و $z\ne i$ وَ لتكن M النقطة ذات اللاحقة z.

(أي $M\ne U$ وَ $M\ne V$)

M نقطة من المستقيم (UV) باستثناء U وَ V إذا وفقط إذا كان $(\overrightarrow{MU};\overrightarrow{MV})=k\pi$ / k عدد صحيح.

إذا وفقط إذا كان $\arg\left(\frac{z-1}{z-i}\right)=k\pi$ معناه $\frac{z-1}{z-i}$ عدد حقيقي غير معدوم.

ب) $M(z)$ نقطة من المستقيم (UV) باستثناء U وَ V معناه $\arg\left(\frac{z-1}{z-i}\right)=l\pi$ / l عدد صحيح.

لدينا مما سبق $\arg\left(\frac{z'-1}{z'-i}\right)=-\frac{\pi}{2}-\arg\left(\frac{z-1}{z-i}\right)+2k\pi$

أي $\arg\left(\frac{z'-1}{z'-i}\right)=-\frac{\pi}{2}+k'\pi$ / $k'=(2k+l)$ عدد صحيح.

أي $\left(\overrightarrow{M'U};\overrightarrow{M'V}\right)=\frac{\pi}{2}+k\pi$ / k عدد صحيح. معناه M' ترسم الدائرة التي قطرها $[UV]$ باستثناء U، V وَ O.

التمرين 4 (5 نقط) $(\Omega;p)$ فضاء احتمالي منته.

1. يرمز A للحادثة " ثقبت الكرة" ولدينا $p(A)=0.2$.

أ) احتمال أن تبقى الكرة سالمة في نهاية الطلقة الثانية هو $p(\overline{A})\times p(\overline{A})$

($\overline{A}$ يرمز إلى الحادثة " الكرة سالمة").

$p(\overline{A})\times p(\overline{A})=[p(\overline{A})]^2=[1-p(A)]^2=(0.8)^2=0.64$ (الطلقات مستقلّة)

ب) الحادثة "طلقتان كافيتان لثقب الكرة" عكسها هو " الكرة سالمة في نهاية الطلقتين"

إذاً: احتمال أن تبقى الكرة سالمة في نهاية الطلقة الثانية هو $1-0.64=0.36$.

ج) الحادثة " n طلقة كافية لثقب الكرة" عكسها هو " الكرة سالمة في نهاية n طلقة"

إذاً: $p_n=1-[p(\overline{A})]^n=1-(0.8)^n$.

د) $p_n>0.99$ معناه $1-(0.8)^n>0.99$ يكافئ $(0.8)^n<0.01$

أي $\ln(0.8)^n<\ln(0.01)$ يكافئ $n\ln(0.8)<\ln(0.01)$

أي $n>\frac{\ln(0.01)}{\ln(0.8)}\approx 20.63$ إذاً $n\geq 21$.

2. احتمال ثقب الكرة في الوجه الذي يحمل الرقم k هو: $p_k=1-(0.8)^k$ / $k\in\{1;2;3;4\}$

نفرض أن النرد جيد التوازن، هذا يعني أن للأوجه نفس احتمال الظهور. إذاً احتمال ظهور كل وجه هو $\frac{1}{4}$ الاحتمال. وبالتالي احتمال ثقب الكرة هو:

$$\frac{1}{4}(p_1+p_2+p_3+p_4)=\frac{1}{4}[(1-0.8)+(1-0.64)+(1-0.512)+(1-0.409)]$$
$$=0.4096$$

3. أ) التواترات هي: $f_1=\frac{58}{200}=\frac{29}{100}$، $f_2=\frac{49}{200}$، $f_3=\frac{52}{200}=\frac{13}{50}$ وَ $f_4=\frac{41}{200}$.

ب) $d^2=\sum_{k=1}^{4}\left(f_k-\frac{1}{4}\right)^2\approx 0.00375$.

ج) نلاحظ أن $d^2<D_9$ إذاً: بمجازفة مقدارها 10%، يمكن اعتبار أن هذا النرد متوازن.

الموضوع السابع

بكالوريا علوم تجريبية --- جوان 2006 --- لارينيون

التمرين1 (4نقط)

الجزء A

f الدالة المعرّفة على المجال $]1;+\infty[$ بالدستور: $f(x)=\frac{x}{\ln x}$.

1. أ- عيّن نهايات الدالة f عند 1 وعند $+\infty$.

ب- ادرس تغيرات الدالة f.

2. (u_n) المتتالية المعرّفة بـ: $u_0=5$ وَ $u_{n+1}=f(u_n)$ من أجل كل عدد طبيعي n.

أ- الرسم المعطى في التمرين هو للتمثيل البياني (C_f) للدالة f (يرجع الرسم مع ورقة الإجابة).

أنشئ المستقيم الذي معادلته $y=x$ والنقطتين M_1 وَ M_2 من (C_f) ذات الفاصلتين u_1 وَ u_2 على الترتيب. ضع تخمينا حول سلوك المتتالية (u_n).

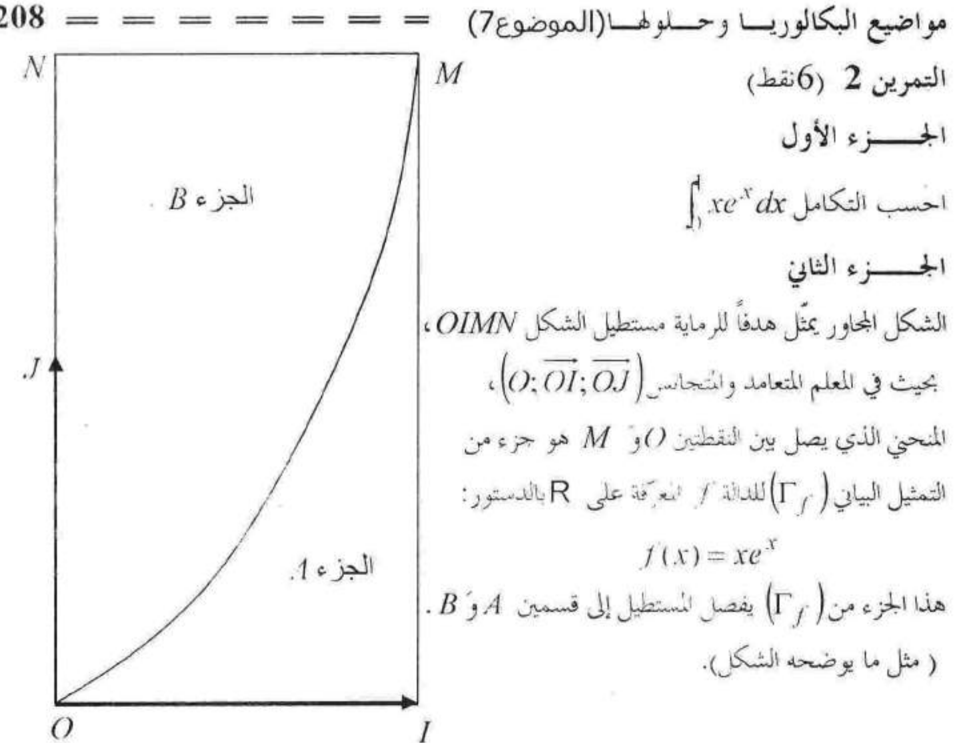
ب- بيّن أنه من أجل كل عدد طبيعي n لدينا: $u_n\geq e$.

ج- بيّن أن المتتالية (u_n) متقاربة نحو العدد l من المجال $[e;+\infty[$.

الجزء B

نذكر أن الدالة f مستمرة على المجال $]1;+\infty[$.

بدراسة نهاية المتتالية $f(u_n)$، بيّن أن $f(l)=l$. استنتج قيم العدد l



التمرين 2 (6نقط)

الجـــزء الأول

احسب التكامل $\int_0^1 xe^x dx$

الجـــزء الثاني

الشكل المجاور يمثّل هدفاً للرماية مستطيل الشكل $OIMN$،
بحيث في المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OJ})$،
المنحني الذي يصل بين النقطتين O وَ M هو جزء من
التمثيل البياني (Γ_f) للدالة f المعرّفة على $\mathbb{R}$ بالدستور:

$f(x)=xe^x$

هذا الجزء من (Γ_f) يفصل المستطيل إلى قسمين A وَ B.
(مثل ما يوضحه الشكل).

لعبة تكمن في رمي سهم ليصيب إما خارج الهدف وإما أحد القسمين A أو B .
نفرض أن السهم عند الرماية لا يصيب حدود الهدف ولا المنحني (Γ_f).
دراسة احصائية أوضحت ان احتمال أن يصيب السهم خارج الهدف هو 0.5،
وأن احتمال اصابة أحد الجزئين A أو B متناسب مع مساحتهما.

1. بيّن أن احتمال إصابة الجزء A يساوي $\frac{1}{2e}$. ما هو احتمال إصابة الجزء B؟
2. نرمي بطريقة مستقلّة ثلاثة أسهم.
   أ- ليكن X المتغيّر العشوائي الذي يساوي عدد الأسهم التي تصيب الجزء A.
   عيّن قانون الأحتمال للمتغيّر X واحسب أمله الرياضي.
   ب- نعتبر الحادثة E " سهمين بالظبط يصيبان الجزء A ".أعط قيمة مقرّبة لاحتمال E إلى 10^{-3}.
   ج- نعتبر الحادثة F " الأسهم الثلاثة تصيب الجزء B ". احسب احتمال F (تعطى القيمة المظبوطة).
   علما أن ولا سهم اصاب خارج الهدف، ما هو احتمال أن تصيب الأسهم الثلاثة الجزء B؟
3. نرمي هذه المرة ، بطريقة مستقلّة n سهم.
   أ-عيّن بدلالة n الاحتمال p أن يصيب على الأقل سهم واحد الجزء A.

ب- عيّن أصغر عدد طبيعي n يحقق: $p_n \geq 0.99$.

التمرين 3 (5 نقط)

المستوي المركّب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$. وحدة القياس $2cm$.

i يرمز إلى العدد المركّب الذي طويلته 1 وَ العدد $\frac{\pi}{2}$ عمدة له.

ننجز شكلامناسبا و يملء تدريجيا مع التقدّم في الأسئلة.

1. حل في مجموعة الأعداد المركّبة C المعادلة $\frac{z-4}{z}=i$.
   تكتب الحلول بالشكل الجبري.
2. حل في C المعادلة $z^2-2z+4=0$. تكتب الحلول بالشكل الأسي.
3. نعتبر النقط A ، B ، A' وَ D من المستوي المركّب لواحقها على الترتيب
   $a=2$ ، $b=4$ ، $a'=2i$ وَ $d=2+2i$. ما طبيعة المثلث ODB؟
4. لتكن النقطتين E وَ F ذات اللاحقتين $e=1-i\sqrt{3}$ وَ $f=1+i\sqrt{3}$ على الترتيب. ما طبيعة الرباعي $OEAF$؟
5. (c) الدائرة التي مركزها A ونصف قطرها 2 وَ (c') الدائرة التي مركزها A' ونصف قطرها 2. ليكن r الدوران الذي مركزه O وزاويته $\frac{\pi}{2}$.
   أ- E' هي صورة النقطة E بالدوران r. أحسب e' لاحقة النقطة E' .
   ب- بيّن أن النقطة E' تنتمي إلى الدائرة (c').
   ج- تحقق أن $e-d=(\sqrt{3}+2)(e'-d)$. واستنتج أن النقط E ، E' و D على استقامة واحدة.
6. نعتبر D' صورة النقطة D بالدوران r . بيّن أن المثلث $EE'D'$ قائم.

التمرين 4 (4 نقط)

لكل سؤال من الأسئلة الأربعة 1; 2; 3 وَ 4 هناك أربع اجوبة مقترحة (جوابين صحيحين وجوابين خاطئين).

المترشح يضع على ورقة الاجابة رقم السؤال والعبارتين اللتين يحكم بصحتهما. لا يطلب أي تعليل.

الأسئلة الأربعة مستقلة وينقّط كل سؤال على 1. كل جواب صحيح علامته 0.5 .

في حالة تقديم أكثر من إجابتين لسؤال واحد، تلغى الإجابتان.

الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O,\vec{i};\vec{j};\vec{k})$.

1. نعتبر المستوي (P) الذي معادلته $2x+3y+4z-1=0$.

أ- المسافة بين النقطة O والمستوي (P) تساوي 1.

ب- المسافة بين النقطة O والمستوي (P) تساوي $\frac{1}{\sqrt{29}}$.

ج- الشعاع $\vec{n}\left(1;\frac{3}{2};2\right)$ هو ناظم على المستوي (P).

د- المستوي (Q) الذي معادلته $-5x+2y+z=0$ يوازي المستوي (P).

2. نعتبر المستوي (P) الذي معادلته $2x+y-z=0$، والمستقيم (D) الذي يشمل النقطة $A(1;1;1)$ وشعاع توجيهه $\vec{u}(1;-4;-2)$.

أ- المستقيم (D) يوازي المستوي (P).

ب- المستقيم (D) يعامد المستوي (P).

ج- المستقيم (D) يقطع المستوي (P).

ج- تمثيل وسيطي للمستقيم (D) هو: $\begin{cases} x=1+t \\ y=1-4t \\ z=1-2t \end{cases}$ حيث $(t\in\mathbb{R})$

3. E تمثل مجموعة النقط $M(x;y;z)$ حيث: $x+y+z=3$ وَ $2x-z=1$. نعتبر النقطة $A(1;1;1)$.

أ- المجموعة E تظم نقطة واحدة وهي A.

ب- المجموعة E هي مستقيم يمر من A.

ج- المجموعة E هي مستو يمر من A.

د- المجموعة E هي مستقيم شعاع توجيهه $\vec{u}(1;-3;2)$.

4. $ABCD$ رباعي وجوه. (P) المستوي الذي يمرّ من الرأس A ويعامد المستقيم (BC).

أ- المستوي (P) يشمل دائما النقطة D.

ب- المستوي (P) يشمل دائما العمود (AH) للمثلث ABC.

ج- المستوي (P) هو دوما مجموعة النقط M من الفضاء التي تحقق $\overrightarrow{BM}\cdot\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}$.

د- المستوي (P) هو دوما المستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[BC]$.

تصحيح الموضوع السابع

بكالوريا علوم تجريبية --- جوان 2006 --- لارينيون

التمرين1 (4نقط)

الجـــزء A

f الدالة المعرّفة على المجال $]1;+\infty[$ بالدستور: $f(x)=\frac{x}{\ln x}$.

1. أ- $\lim\limits_{\substack{x\to1\\>}}\left(\frac{x}{\ln x}\right)=+\infty$ كون $\ln 1=0$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{\ln x}\right)=+\infty$ (مقلوب نهاية شهيرة)

ب- f هي حاصل قسمة دالتين قابلتين للاشتقاق على مجموعة تعريفهما وبالتالي f قابلة للاشتقاق على $]1;+\infty[$.

$f'(x)=\frac{(x)'\ln x-(\ln x)'x}{(\ln x)^2}=\frac{\ln x-1}{(\ln x)^2}$ له نفس اشارة العدد $(\ln x-1)$.

$(\ln x-1)$ ينعدم عند e، موجب تماما في $]e;+\infty[$ وسالب تماما في $]1;e[$ وبالتالي جدول التغيرات f:

x	1		e		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	↘	e	↗	$+\infty$

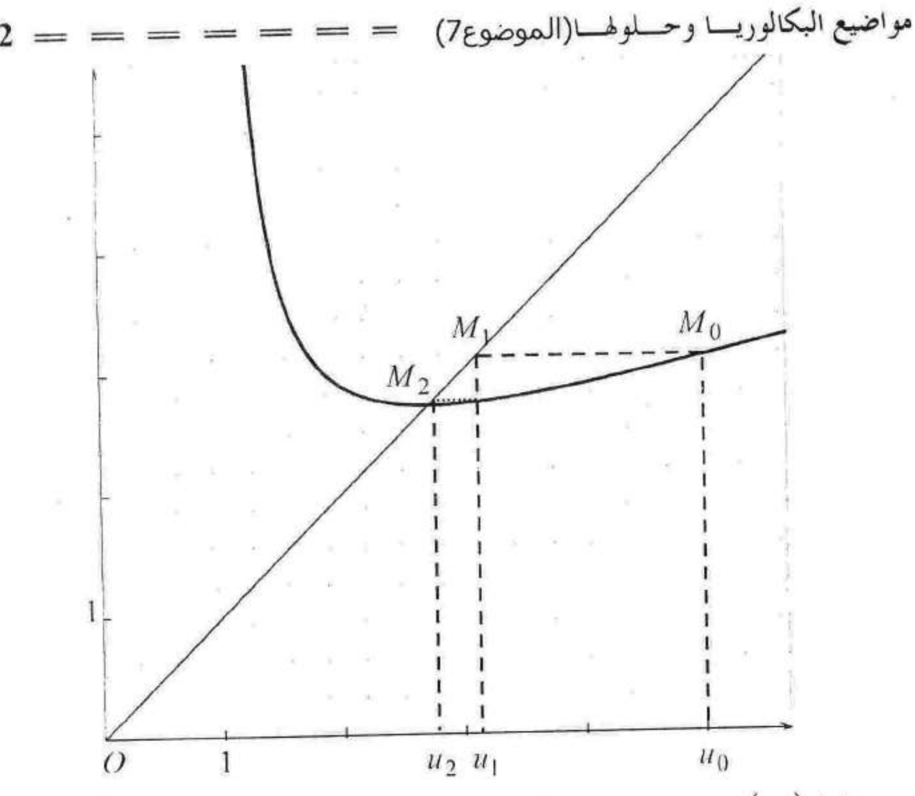
2. أ- يظهر أن المتتالية تتقارب بسرعة.(انظر الرسم)

ب- لدينا $u_0=5\geq e$ محقق، وَ من أجل كل عدد طبيعي $n>0$. u_n هو صورة بالدالة f لعدد حقيقي.

حسب جدول تغيرات الدالة f لدينا: $f(x)\geq e$ من أجل كل $x>1$ أي $u_n\geq e$.

ج - لدينا $u_{n+1}-u_n=\frac{(1-\ln u_n)u_n}{\ln u_n}$. و لدينا مماسبق أن $u_n\geq e$ أي $\ln u_n\geq 1$

إذاً إشارة $u_{n+1}-u_n$ هي من إشارة $(1-\ln u_n)$ الذي هو سالب من أجل كل عدد طبيعي n.



وبالتالي (u_n) متناقصة تماما على N وهي محدودة من الأسفل بالعدد e، فهي إذاً متقاربة نحو عدد حقيقي l حيث $l \geq e$.

الجـــزء B

1. لدينا $u_{n+1}=f(u_n)$ وبالتالي $\lim_{n\to+\infty}(u_{n+1})=\lim_{n\to+\infty} f(u_n)=f\left(\lim_{n\to+\infty} u_n\right)$ كون f مستمرة على المجال $]1;+\infty[$. أي $l=\lim_{n\to+\infty}(u_{n+1})=f\left(\lim_{n\to+\infty} u_n\right)=f(l)$ منه $f(l)=l$.

2. $f(l)=l$ يكافئ $\frac{l}{\ln l}=l$ أي $\ln l=1$ يعني $l=e$.

التمرين 2 (6نقط)

الجـــزء الأول

$\int_0^1 xe^x dx$ نكامل بالتجزئة: نضع $\begin{cases} u(x)=x \\ v'(x)=e^x \end{cases}$ ينتج أن $\begin{cases} u'(x)=1 \\ v(x)=e^x \end{cases}$

بما أن الدالتين u وَ v تقبلان الاشتقاق وَ الدالتين u' وَ v' مستمرتين فـإن:

$$\int_0^1 xe^x dx = [u(x)v(x)]_0^1 - \int_0^1 v(x)u'(x)dx = \left[xe^x\right]_0^1 - \left[e^x\right]_0^1 = 1$$

الجـــزء الثاني

1. مساحة الحيّز A من المستوي هو $\int_0^1 xe^x dx$ وقيمته 1.

مساحة المستطيل $OIMN$ هي e $1\times f(1)=e$، إذاً مساحة الحيّز B هي $e-1$.

للتعرّف على الاحتمالات المطلوبة نرتب المساحات في الجول التالي علما انها متناسبة مع احتمالاتها.

الحيّز	A	B	الاجمالي
المساحة	1	$e-1$	e
الاحتمال	$\frac{1}{2e}$	$\frac{e-1}{2e}$	0.5

نضع a يساوي احتمال إصابة الجزء A. إذاً: $\frac{e}{0.5}=\frac{1}{a}$ يكافئ $a=\frac{1}{2e}$

احتمال إصابة الجزء B هو: $0.5-a$

2. أ- نهتم هنا بتجربة عشوائية ثلاث مرات ذات مخرجين:

"نصيب الجزء A" احتماله يساوي $\frac{1}{2e}$. " لانصيب الجزء A" احتماله $1-\frac{1}{2e}$

نعرّف إذا قانون الاحتمال للمتغيّر X هو قانون برنولي وسيطاه $n=3$ وَ $p=\frac{1}{2e}$.

وبالتالي الأمل الرياضي للمتغيّر X هو: $n\times p=\frac{3}{2e}\approx 0.552$

ب- $p(E)=p(X=2)=C_3^2\left(\frac{1}{2e}\right)^2\left(1-\frac{1}{2e}\right)=\frac{3(2e-1)}{8e^3}\approx 0.083$

ج- نعتبر قانون برنولي وسيطاه $n=3$ وَ $p=\frac{e-1}{2e}$.

$$p(F)=C_3^3\left(\frac{e-1}{2e}\right)^3=\frac{(e-1)^3}{8e^3}.$$

نعتبر الحادثة G " ولا سهم اصاب خارج الهدف"

احتمال أن تصيب الأسهم الثلاثة الجزء B علما أن ولا سهم اصاب خارج الهدف هو:

ولدينا: $p_G(F)=\frac{p(F\cap G)}{p(G)}=\frac{\frac{(e-1)^3}{8e^3}}{\left(\frac{1}{2}\right)^3}\approx 0.253$

3. أ- $p(X\ge 1)=1-p(X=0)=1-C_n^0\left(\frac{1}{2e}\right)^0\left(\frac{e-1}{2e}\right)^n=1-\left(\frac{e-1}{2e}\right)^n$

ب- $p_n\ge 0.99$ يكافئ $1-\left(\frac{e-1}{2e}\right)^n\ge 0.99$ يكافئ $\left(\frac{e-1}{2e}\right)^n\le 0.01$

أي $n\ln\left(\frac{e-1}{2e}\right)\le \ln(0.01)$

وبالتالي $n\ge\frac{\ln(0.01)}{\ln\left(\frac{e-1}{2e}\right)}\approx 22.7$ أصغر قيمة للعدد n هي 23.

التمرين 3 (5 نقط)

المستوي المركّب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$. وحدة القياس $2cm$.

1. $\frac{z-4}{z}=i$ تكافئ $z-4=iz$ وَ $z\neq 0$ تكافئ $z=\frac{4}{1-i}=2+2i$

وَ $z\neq 0$ إذاً : $S=\{2+2i\}$.

2. $z^2-2z+4=0$ تكافئ $(z-1)^2=-3$ تكافئ $z_1=1-i\sqrt{3}$

وَ $z_2=1+i\sqrt{3}$ وبالتالي $S=\{z_1;z_2\}$

$|z_1|=2$ إذاً: $z_1=2\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=2e^{i\frac{\pi}{3}}$ وكذلك $z_2=2e^{-i\frac{\pi}{3}}$

كون $z_2=\overline{z_1}$

3. لدينا حسب السؤال الأول $\frac{z-4}{z}=i$ من أجل $z=d$، نجد أن $\frac{d-b}{d-0}=i$

يعني $BD=OD$ وَ $(\overrightarrow{OD},\overrightarrow{BD})\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$ إذاً المثلث ODB قائم في D ومتساوي الساقين.

4. e وَ f هما حلّي المعادلة $z^2-2z+4=0$ إذاً: ($e^2-2e+4=0$

وَ $f^2-2f+4=0$). باجراء الفرق ينتج أن $e^2-f^2-2(e-f)=0$

طرف من طرف.

يعني أن $(e-f)(e+f-2)=0$ معناه $e+f=2=a$ إذاً الرباعي $OEAF$ متوازي أضلاع

و علما أن $|e|=|f|=2$ فإن الرباعي $OEAF$ معيّن.

5. أ- إذا كانت $M'(z')$ صورة $M(z)$ بالدوران r الذي مركزه O وزاويته $\frac{\pi}{2}$. فإن:

$z'=iz$

وبالتالي $z_{E'}=iz_E=i(1-i\sqrt{3})=i+\sqrt{3}$

ب- $A'E'=|z_{E'}-z_{A'}|=|\sqrt{3}-i|=2$ يعني أن النقطة E' تنتمي إلى الدائرة (c').

ج- $e-d=1-i\sqrt{3}-2-2i=-1-i(2+\sqrt{3})$

وَ $(\sqrt{3}+2)(e'-d)=(\sqrt{3}+2)(\sqrt{3}-2-i)=-1-i(\sqrt{3}+2)$

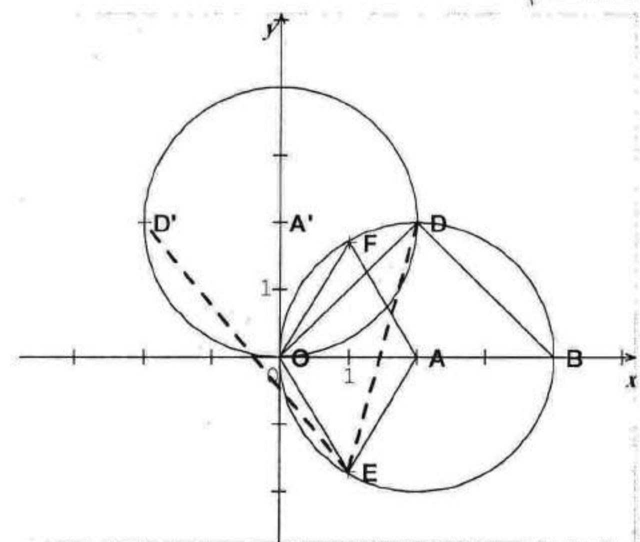
من العلاقة $e-d=(\sqrt{3}+2)(e'-d)$ ينتج أن $\overrightarrow{DE}=(\sqrt{3}+2)\overrightarrow{DE'}$

يعني أن النقط E، E' وَ D على استقامة واحدة.

6. لدينا مما سبق: E' هي صورة النقطة E بالدوران r و بما أن D' صورة النقطة D بالدوران r

فإن صورة المستقيم (ED) الذي هو نفسه المستقيم (EE') بالدوران r، هو المستقيم الذي يعامده $(E'D')$.

هذا يعني أن المثلث $EE'D'$ قائم.



التمرين 4 (4 نقط)

1. نعتبر المستوي (P) الذي معادلته $2x+3y+4z-1=0$.

أ- المسافة بين النقطة O والمستوي (P) هي: $\frac{|-1|}{\sqrt{4+9+16}}=\frac{1}{\sqrt{29}}$ تساوي 1 . (**خطأ**)

ب- المسافة بين النقطة O والمستوي (P) تساوي $\frac{1}{\sqrt{29}}$. (**صحيح**)

ج- الشعاع $\vec{n}\left(1;\frac{3}{2};2\right)$ هو ناظم على المستوي (P).(**صحيح**) كون

$$(P): x+\frac{3}{2}y+2z-\frac{1}{2}=0$$

د- المستوي (Q) الذي معادلته $-5x+2y+z=0$ يوازي المستوي (P).(**خطأ**)

كون الشعاع $\vec{n}'(-5;2;1)$ هو ناظم على المستوي (Q) ولدينا $\vec{n}\cdot\vec{n}'=0$ معناه (P) وَ (Q) متعامدان.

2. نعتبر المستوي (P) الذي معادلته $2x+y-z=0$، والمستقيم (D) الذي يشمل النقطة $A(1;1;1)$ وشعاع توجيهه $\vec{u}(1;-4;-2)$.

أ- المستقيم (D) يوازي المستوي (P).(**صحيح**) كون $\vec{n}(2;1;-1)$ شعاع ناظم على المستوي (P) يحقق $\vec{n}\cdot\vec{u}=0$ معناه $\vec{n}\perp\vec{u}$.

ب- المستقيم (D) يعامد المستوي (P).(**خطأ**) كون $\vec{n}\perp\vec{u}$

ج- المستقيم (D) يقطع المستوي (P).(**خطأ**) كون (D) يوازي المستوي (P)، وَ نقطة من (D) ولاتنتمي إلى (P). أي (P) لا يحوي (D).

د- تمثيل وسيطي للمستقيم (D) هو: $\begin{cases}x=1+t\\y=1-4t\\z=1-2t\end{cases}$ حيث $(t\in\mathbb{R})$(**صحيح**) كون الجملة تكافئ $\overrightarrow{AM}=t\vec{u}$.

3. E تمثل مجموعة النقط $M(x;y;z)$ حيث: $x+y+z=3$ وَ $2x-z=1$.

نعتبر النقطة $A(1;1;1)$.

أ- المجموعة E تظم نقطة واحدة وهي A .(**خطأ**) كون E هي تقاطع مستويين وفق مستقيم على الأقل.

ب- المجموعة E هي مستقيم يمر من A . (**صحيح**) كون E هي مستقيم تقاطع المستويين كلاهما يشملان A .

ج- المجموعة E هي مستو يمر من A .(**خطأ**) حسب ما سبق

د- المجموعة E هي مستقيم شعاع توجيهه $\vec{u}(1;-3;2)$.(**صحيح**) كون جملة معادلتي المستويين تكافئ $\begin{cases}x+y=3-z\\x=\frac{1+z}{2}\end{cases}$ تكافئ $\begin{cases}x=t+\frac{1}{2}\\y=-3t+\frac{5}{2}\\z=2t\end{cases}$ حيث $(t\in\mathbb{R})$ هو تمثيل وسيطي للمستقيم الذي شعاع توجيهه $\vec{u}(1;-3;2)$.

4. $ABCD$ رباعي وجوه. (P) المستوي الذي يمرّ من الرأس A ويعامد المستقيم (BC) .

أ- المستوي (P) يشمل دائما النقطة D .(**خطأ**) تعلّل بمثال مضاد

ب- المستوي (P) يشمل دائما العمود (AH) للمثلث ABC . (**صحيح**) كون (AH) يعامد (BC) فهو إذاً يوازي (P) ويشمل A .

ج- المستوي (P) هو دوما مجموعة النقط M من الفضاء التي تحقق $\overrightarrow{BM}\cdot\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}$. (**صحيح**) كون

$\overrightarrow{BM}\cdot\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}$ تكافئ $\left(\overrightarrow{BM}-\overrightarrow{BA}\right)\overrightarrow{BC}=0$ أي $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BC}=0$

يعني أن: M تنتمي إلى المستوي الذي يشمل A ويعامد (BC) .

د- المستوي (P) هو دوما المستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[BC]$.(**خطأ**) كون الوجه (ABC) كيفي، يعني الارتفاع $[AH]$ ليس شرطا المتوسط في المثلث ABC .

الموضوع الثامن

بكالوريا علوم تجريبية --- سبتمبر 2006 --- فرنسا

التمرين1 (5 نقط)

تدور الأحداث على قمة جبال حجرية تطل على البحر. للذهاب إلى البحر قصد الاستجمام، على السياح اختيار أحد الشاطئين، علما أن أحدهما يقع غربا والأخر شرقاً.

A. يوجد سائح منذ يومين على قمة الجبل. يختار عشوائيا في اليوم الأول أحد الاتجاهين، ونعتبر أن احتمال اختياره في اليوم الثاني الاتجاه المعاكس للإتجاه الذي اختاره في اليوم الأول يساوي 0.8.

من أجل $i=1$ أو $i=2$ نضع:

E_i الحادثة: " السائح يتجه نحو الشرق في اليوم i".

O_i الحادثة: " السائح يتجه نحو الغرب في اليوم i".

1. ارسم شجرة الاحتمالات لوصف الوضعية.
2. عيّن الاحتمالات التالية: $p(E_1)$ ، $p_{E_1}(O_2)$ ، $p(E_1\cap E_2)$.
3. مااحتمال أن يذهب هذا السائح إلى نفس الشاطئ ليومين متتاليين.

B. نفرض الآن أن n سائح $n\geq 3$ وجد يوما على قمة هذا الجبل.

هؤلاء السياح كلهم يرغبون في الذهاب إلى الشاطئ وكلا منهم يختار عشوائيا وجهة من بين الوجهتين مستقل عن اختيار زميله. نسمي X المتغيّر العشوائي الذي يعطي عدد السواح المتّجهون إلى الشرق.

1. عيّن احتمال أن يكون k سائح $0\leq k\leq n$ متجه نحو الشرق.
2. نفرض أن الشاطئين كانا في بداية اليوم فارغين تماما. نقول عن سائح أنه سعيداً عندما يتواجد وحيداً على الشاطئ.

أ- هل يمكن أن يكون سائحان سعيدان؟

ب- بيّن أن احتمال أن يكون سائحا سعيداً من بين n سائح هو: $p=\frac{n}{2^{n-1}}$.

ج- تطبيق عددي:

عندما يظم الفوج من السياح 10 أشخاص. عبّر عن احتمال أن يكون سائحا سعيداً من بين العشرة.

التمرين 2 (4 نقط)

المستوي المركّب مزوّد بالمعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$. نعتبر النقطتين M وَ M' ذات اللاحقتين على الترتيب z وَ z'. نضع: $z=x+iy$ وَ $z'=x'+iy'$ حيث: $x;x';y;y'$ أعداد حقيقية.

1. بيّن أن الشعاعان $\overrightarrow{OM}$ وَ $\overrightarrow{OM'}$ متعامدان **إذا وفقط إذا كان** $\mathrm{Re}(z'\bar{z})=0$.
2. بيّن أن النقط M ، M' وَ O على استقامة واحدة **إذا وفقط إذا كان** $\mathrm{Im}(z'\bar{z})=0$.

تطبيق:

3. N النقطة ذات اللاحقة (z^2-1) .ما هي مجموعة النقط M بحيث يكون الشعاعان $\overrightarrow{OM}$ وَ $\overrightarrow{ON}$ متعامدان؟
4. نفرض أن $z\neq 0$. P النقطة ذات اللاحقة $\left(\frac{1}{z^2}-1\right)$. نبحث عن مجموعة النقط M بحيث تكون النقط O ، N وَ P على استقامة واحدة.

أ- بيّن أن: $\left(\frac{1}{z^2}-1\right)\left(\overline{z^2-1}\right)=-\bar{z}^2\left|\frac{1}{z^2}-1\right|^2$.

ب- باستعمال التكافؤ المبرهن عليه في بداية التمرين، تعرّف على المجموعة المطلوبة.

التمرين 3 (5 نقط)

كل التمرين λ يرمز إلى عدد حقيقي من المجال $]0;1]$.

1. نقترح دراسة الدوال القابلة للاشتقاق على المجال $\left]-\infty;\frac{1}{2}\right[$ والتي تحقق المعادلة التفاضلية $(E_\lambda): y'=y^2+\lambda y$ والشرط $y(0)=1$.

نفرض وجود حلا y_0 للمعادلة (E_λ) موجب تماما على المجال $\left]-\infty;\frac{1}{2}\right[$ ،

ونضع على المجال $\left]-\infty;\frac{1}{2}\right[$: $z=\frac{1}{y_0}$

اكتب معادلة تفاضلية بسيطة تحققها الدالة z .

2. سؤال من الدرس.

حلول المعادلة التفاضلية $y'=-\lambda y$ هي الدوال $x\mapsto Ce^{-\lambda x}$ حيث C ثابت حقيقي.

أ- بيّن وجود وواحدية الحل z للمعادلة التفاضلية $(E'_\lambda): z'=-(\lambda z+1)$ حيث $z(0)=1$.

ب- أعط عبارة هذه الدالة ونرمز لها z_0.

3. نريد الآن أن نبيّن أن الدالة z_0 لا تنعدم في المجال $\left]-\infty;\frac{1}{2}\right[$.

أ- بيّن أن $\ln(\lambda+1)>\frac{\lambda}{\lambda+1}$. (يمكننا دراسة الدالة f المعرّفة بالدستور:

$f(x)=\ln(x+1)-\frac{x}{x+1}$ على $]0;1]$)

ب- استنتج أن $\frac{1}{\lambda}\ln(\lambda+1)>\frac{1}{2}$

4. استنتج أن الدالة z_0 لا تنعدم في المجال $\left]-\infty;\frac{1}{2}\right[$.

بيّن إذاً أن المعادلة (E_λ) تقبل حلا موجبا تماما على المجال $\left]-\infty;\frac{1}{2}\right[$ يطلب تعيينه.

التمرين 4 (6 نقط)

$ABCDEFGH$ مكعبا طول حرفه $3cm$، (الشكل في نهاية التمرين).

نعتبر I مرجّح الجملة المثقلة $\{(E;2);(F;1)\}$ وَ J مرجّح الجملة المثقلة $\{(B;2);(F;1)\}$ وَ K مرجّح الجملة المثقلة $\{(G;2);(C;1)\}$.

نهدف إلى تعيين مجموعة النقط M من الفضاء المتساوية البعد عن النقط I، J، وَ K. نرمز لهذه المجموعة بـ Δ.

1. ضع النقط I، J، وَ K على الشكل المرفق.
2. نعتبر Ω النقطة من Δ الواقعة في المستوي (IJK). ماذا تمثّل هذه النقطة بالنسبة للمثلث IJK؟

في بقية التمرين نعتبر في الفضاء المعلم $\left(A;\frac{1}{3}\overrightarrow{AD};\frac{1}{3}\overrightarrow{AB};\frac{1}{3}\overrightarrow{AE}\right)$ المتعامد والمتجانس.

3. أعط احداثيات النقط I، J، وَ K.
4. نعتبر النقطتين $P(2;0;0)$ وَ $Q(1;3;3)$ يطلب وضعهما على الرسم. بيّن أن المستقيم (PQ) عمودي على المستوي (IJK).

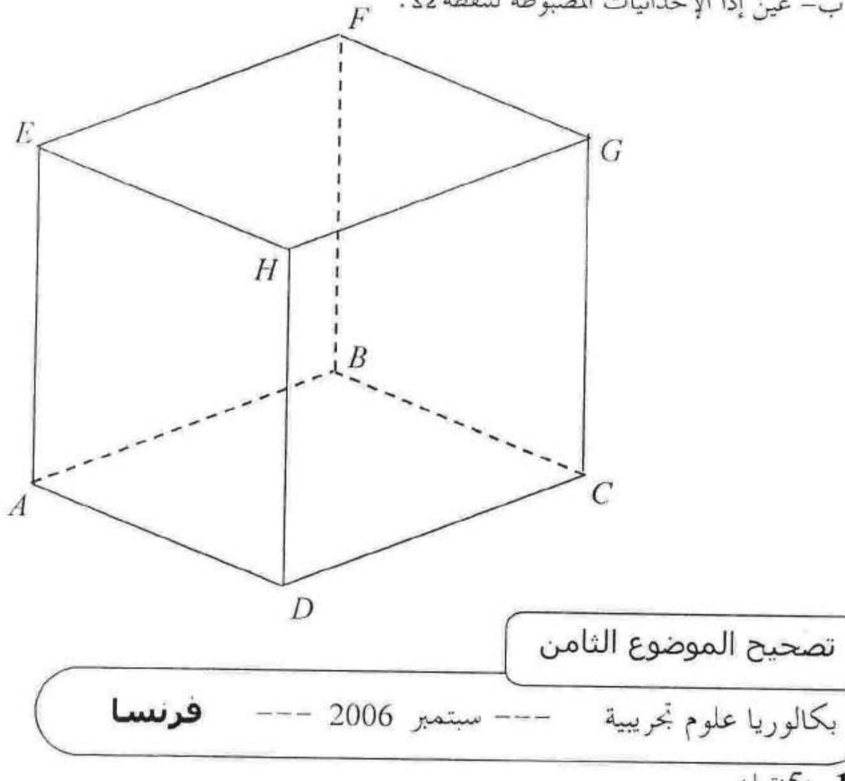
5. نعتبر النقطة M من الفضاء احداثياها $(x;y;z)$.

أ- بيّن أن M نقطة من Δ إذا وفقط إذا كانت الثلاثية $(x;y;z)$ حلا لجملة ثلاث معادلات خطية يطلب تعيينها. ما هي طبيعة Δ؟

ب- تحقق من أن P وَ Q نقطتان من Δ. أرسم Δ على الشكل المرفق.

6. أ- عيّن شعاعا ناظم على المستوي (IJK) واستنتج معادلة ديكارتية لهذا المستوي.

ب- عيّن إذاً الإحداثيات المضبوطة للنقطة Ω.



تصحيح الموضوع الثامن

بكالوريا علوم تجريبية --- سبتمبر 2006 --- **فرنسا**

التمرين1 (5نقط)

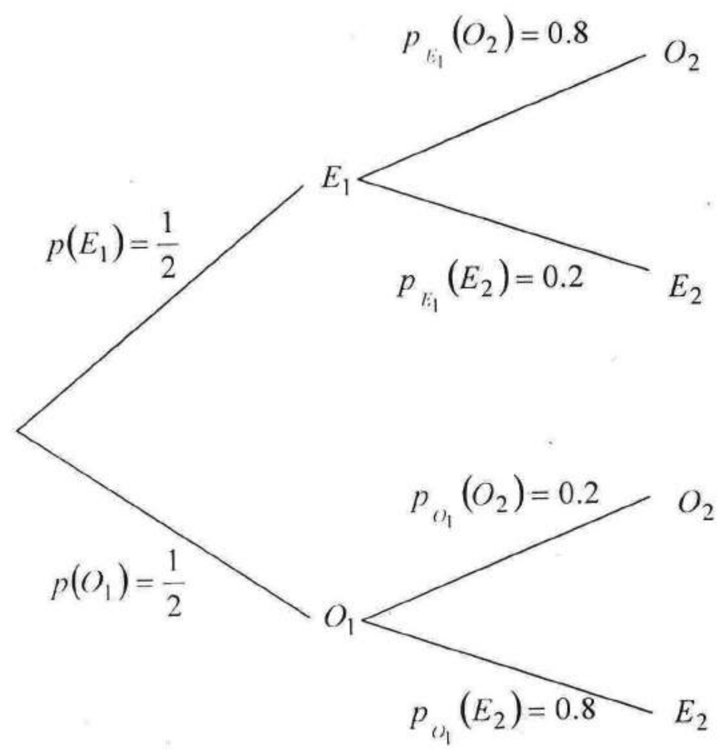
نبدأ بترجمة المعطيات:

A. السائح يختار عشوائيا في اليوم الأول إحدى الوجهتين. يعني أن $p(E_1)=p(O_1)=\frac{1}{2}$.

في اليوم الثاني يختار وجهة معاكسة للوجهة المختارة في اليوم الأول وَ لدينا:

$p_{O_1}(E_2)=p_{E_1}(O_2)=0.8$ وبالتالي: $p_{O_1}(O_2)=p_{E_1}(E_2)=1-0.8=0.2$

1. شجرة الاحتمالات:



2. $p(E_1)=\frac{1}{2}$ ، $p_{E_1}(O_2)=0.8$ ، $p(E_1\cap E_2)=p(E_1)\times p_{E_1}(E_2)$
$$=0.5\times 0.2=0.1$$

3. حادثة: " أن يذهب إلى نفس الشاطئ ليومين متتاليين": $(E_1\cap E_2)\cup(O_1\cap O_2)$

وبالتالي: $p[(E_1\cap E_2)\cup(O_1\cap O_2)]=p(E_1\cap E_2)+p(O_1\cap O_2)$
$$=0.1+0.1=0.2$$

B. نفرض الآن أن n سائح $n\geq 3$ وجد يوما على قمة الجبل المذكور.

1. المتغيّر العشوائي X يتبع قانون ثنائي الحد وسيطاه $n=k$ وَ $p=0.5$

إذاً: $p(X=k)=C_n^k\times\left(\frac{1}{2}\right)^n=\frac{C_n^k}{2^n}$

2. أ- لا يمكن أن يكون سائحان سعيدان معا. كون شرط السعادة هو التواجد وحيداً على الشاطئ.

ب- حادثة " سائحا واحدا سعيدا" هي: $[(X=1)$أو$(X=n-1)]$

احتماله هو: $p(X=1)+p(X=n-1)=\frac{C_n^1}{2^n}+\frac{C_n^{n-1}}{2^n}=\frac{n+n}{2^n}=\frac{n}{2^{n-1}}$

ج- من أجل $n=10$

احتمال أن يكون سائحا سعيداً من بين العشرة هو: $p(X=1)+p(X=9)=\frac{10}{2^9}\approx 0.019$

التمرين 2 (4 نقط)

المستوي المركّب مزوّد بالمعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$. نعتبر النقطتين M وَ M' ذات اللاحقتين على الترتيب z وَ z'. نضع: $z=x+iy$ وَ $z'=x'+iy'$ حيث: $x;x';y;y'$ أعداد حقيقية.

1. لدينا $\overrightarrow{OM}(x;y)$ وَ $\overrightarrow{OM'}(x';y')$ ولدينا:
$$z'\bar{z}=(x'+iy')(x-iy)=(xx'+yy')+i(xy'-yx')$$
إذاً: $\mathrm{Re}(z'\bar{z})=xx'+yy'$ وَ $\mathrm{Im}(z'\bar{z})=xy'-yx'$

وبالتالي: $\overrightarrow{OM}$ وَ $\overrightarrow{OM'}$ متعامدان معناه $xx'+yy'=0$ أي $\mathrm{Re}(z'\bar{z})=0$

2. النقط M ، M' وَ O على استقامة واحدة معناه محدّد الشعاعين $\overrightarrow{OM}$ وَ $\overrightarrow{OM'}$ معدوم أي $xy'-yx'=0$ يعني أن $\mathrm{Im}(z'\bar{z})=0$.

تطبيـــــق:

3. N النقطة ذات اللاحقة (z^2-1).

مجموعة النقط M بحيث يكون الشعاعان $\overrightarrow{OM}$ وَ $\overrightarrow{ON}$ متعامدان؟

حسب السؤال الأول.الشعاعان $\overrightarrow{OM}$ وَ $\overrightarrow{ON}$ متعامدان **إذا وفقط إذا كان** $\mathrm{Re}((z^2-1)\bar{z})=0$

ولدينا $\mathrm{Re}[(z^2-1)\bar{z}]=\mathrm{Re}(z^2\bar{z}-\bar{z})=\mathrm{Re}(z^2\bar{z})-\mathrm{Re}(\bar{z})=\mathrm{Re}(z\times|z|^2)-\mathrm{Re}(z)$

كون: $\mathrm{Re}(\bar{z})=\mathrm{Re}(z)$ وَ $z\bar{z}=|z|^2$

وبالتالي: $\mathrm{Re}[(z^2-1)\bar{z}]=(|z|^2-1)\mathrm{Re}(z)$

إذاً : $\mathrm{Re}((z^2-1)\bar{z})=0$ يكـــافئ ($|z|^2-1=0$ أو $\mathrm{Re}(z)=0$)

أي ($|z|=1$ أو $\mathrm{Re}(z)=0$) يكافئ ($x^2+y^2=1$ أو $x=0$)

مجموعة النقط هي اتحاد الدائرة التي مركزها O ونصف قطرها 1 مع حامل محور التراتيب.

4. نفرض أن $z \neq 0$. P النقطة ذات اللاحقة $\left(\frac{1}{z^2}-1\right)$.

أ- $$\left(\frac{1}{z^2}-1\right)\left(\overline{z^2-1}\right)=\left(\frac{1}{z^2}-1\right)\times(\bar{z})^2\left(\overline{1-\frac{1}{z^2}}\right)$$
$$=-(\bar z)^2\left(\frac{1}{z^2}-1\right)\times\left(\overline{\frac{1}{z^2}-1}\right)=-(\bar z)^2\left|\frac{1}{z^2}-1\right|^2$$

ب- حسب السؤال السابق لدينا: النقط O، N وَ P على استقامة واحدة إذا وفقط إذا كان $\text{Im}\left[\left(\frac{1}{z^2}-1\right)\left(\overline{z^2-1}\right)\right]=0$

يكافئ $\text{Im}\left[-(\bar z)^2\left|\frac{1}{z^2}-1\right|^2\right]=0$ يكافئ $\left|\frac{1}{z^2}-1\right|^2 \text{Im}\left(-(\bar z)^2\right)=0$

أي ($\text{Im}\left(-(\bar z)^2\right)=0$ أو $\left|\frac{1}{z^2}-1\right|^2=0$) يكافئ ($2xy=0$ أو $z^2=1$)

يكافئ ($x=0$ أو $y=0$) . مجموعة النقط هي اتحاد حاملي محوري الاحداثيات.

التمرين 3 (5 نقط)

λ عدد حقيقي من المجال $]0;1]$.

y_0 حلا للمعادلة (E_λ) ويحقق: $y_0(0)=1$

1. لدينا $z=\frac{1}{y_0}$ يعني أن $y_0=\frac{1}{z}$، الدالتين y_0 وَ z تقبلان الاشتقاق على المجال $\left]-\infty;\frac{1}{2}\right[$. ولدينا: $(y_0)'=-\frac{z'}{z^2}$ أي $y_0^2+\lambda y_0=-\frac{z'}{z^2}$

يعني أن $\left(\frac{1}{z}\right)^2+\lambda\left(\frac{1}{z}\right)=-\frac{z'}{z^2}$ يكافئ $z'=-(1+\lambda z)$

هذا يعني أن z حلا للمعادلة التفاضلية $Y'=-(1+\lambda Y)$.

2. نعلم من الدرس أن حلول المعادلة التفاضلية $y'=-\lambda y$ هي الدوال $x\mapsto Ce^{-\lambda x}$ حيث C ثابت حقيقي.

أ- لدينا حلا خاصا للمعادلة التفاضلية $(E'_\lambda): z'=-(\lambda z+1)$ وهي الدالة الثابتة $Z=-\frac{1}{\lambda}$ وضوحاً.

إذاً نعطي شكلا آخر للمعادلة (E'_λ):

z يحقق المعادلة (E'_λ) يكافئ $z'+\lambda z=-1$ أي $z'+\lambda z=Z'+\lambda Z$

يكافئ $(z-Z)'=-\lambda(z-Z)$ يعني أن الدالة $(z-Z)$ حلا للمعادلة التفاضلية $y'=-\lambda y$.

وبالتالي: $z-Z=Ce^{-\lambda x}$ حيث C تابث حقيقي. أي $z=Ce^{-\lambda x}-\frac{1}{\lambda}$

بما أن $z(0)=1$ فإن $Ce^{-\lambda\times 0}-\frac{1}{\lambda}=1$ أي $C=\frac{1+\lambda}{\lambda}$ ومنه واحدية الحل.

يوجد إذاً حلا واحداً z للمعادلة التفاضلية $(E'_\lambda): z'=-(\lambda z+1)$ حيث $z(0)=1$.وهو: $z=\frac{1+\lambda}{\lambda}e^{-\lambda x}-\frac{1}{\lambda}$

ب- هذا الحل الوحيد هو الدالة $z_0=\frac{1+\lambda}{\lambda}e^{-\lambda x}-\frac{1}{\lambda}$

3. نريد الآن أن نبيّن أن الدالة z_0 لا تنعدم في المجال $\left]-\infty;\frac{1}{2}\right[$.

أ- نعتبر الدالة f المعرّفة على المجال $]0;1]$ بالدستور $f(x)=\ln(x+1)-\frac{x}{x+1}$.

من أجل كل x من المجال $]0;1]$، $f'(x)=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{(x+1)^2}=\frac{x}{(x+1)^2}>0$

يعني أن f متزايدة تماما على $]0;1]$.

بما أن $f(0)=0$ وَ f متزايدة تماما على $]0;1]$ فإنه من أجل كل x من المجال $]0;1]$، $f(x)>0$.

أي $\ln(x+1)>\frac{x}{x+1}$ من أجل كل x من المجال $]0;1]$. يعني أن $\ln(\lambda+1)>\frac{\lambda}{\lambda+1}$.

كون $\lambda\in]0;1]$.

ب- بما ان $\lambda\in]0;1]$ فإن $\frac{\lambda}{\lambda+1}>\frac{\lambda}{2}$

إذاً : من أجل كل λ من المجال $]0;1[$. $\ln(\lambda+1)>\frac{\lambda}{\lambda+1}$ تكافئ $\ln(\lambda+1)>\frac{\lambda}{2}$

أي $\frac{1}{\lambda}\ln(\lambda+1)>\frac{1}{2}$.

4. من أجل $\lambda\in]0;1]$ ، لدينا الدالة $z_0=\frac{1+\lambda}{\lambda}e^{-\lambda x}-\frac{1}{\lambda}$ متناقصة تماما على المجال $\left]-\infty;\frac{1}{2}\right[$. وبالتالي أصغر قيمة للدالة z_0 على المجال $\left]-\infty;\frac{1}{2}\right[$ هي $z_0\left(\frac{1}{2}\right)$.

و لدينا من جهة أخرى وحسب ما سبق أنه من أجل كل λ من المجال $]0;1[$ ،

$$\frac{1}{\lambda}\ln(\lambda+1)>\frac{1}{2}$$

أي $\ln(\lambda+1)-\frac{\lambda}{2}>0$ يعني أن $\ln(\lambda+1)+\ln\left(e^{-\frac{\lambda}{2}}\right)>0$

أي $\ln\left((\lambda+1)e^{-\frac{\lambda}{2}}\right)>0$ يكافئ $(\lambda+1)e^{-\frac{\lambda}{2}}>1$ أي $\frac{\lambda+1}{\lambda}e^{-\frac{\lambda}{2}}-\frac{1}{\lambda}>0$

وبالتالي: $z_0\left(\frac{1}{2}\right)>0$.

بما ان أصغر قيمة للدالة z_0 على المجال $\left]-\infty;\frac{1}{2}\right[$ هي قيمة موجبة تماماً فإن الدالة z_0 موجبة تماما في المجال $\left]-\infty;\frac{1}{2}\right[$. معناه: الدالة z_0 لا تنعدم في المجال $\left]-\infty;\frac{1}{2}\right[$.

وبالتالي المعادلة (E_λ) تقبل حلا موجبا تماما على المجال $\left]-\infty;\frac{1}{2}\right[$.

إذاً : المعادلة (E_λ) تقبل $y_0=\frac{1}{z}$ كحل موجب تماما على المجال $\left]-\infty;\frac{1}{2}\right[$.

ولدينا: $y_0=\frac{\lambda}{(1+\lambda)e^{-\lambda x}-1}$.

التمرين 4 (6 نقط) $ABCDEFGH$ مكعبا طول حرفه $3cm$.

1. I مرجّح الجملة المثقلة $\{(E;2);(F;1)\}$ معناه $\overrightarrow{EI}=\frac{1}{3}\overrightarrow{EF}$.

J مرجّح الجملة المثقلة $\{(B;2);(F;1)\}$ معناه $\overrightarrow{BJ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BF}$.

K مرجّح الجملة المثقلة $\{(G;2);(C;1)\}$ معناه $\overrightarrow{GK}=\frac{1}{3}\overrightarrow{GC}$.

Δ مجموعة النقط M من الفضاء المتساوية البعد عن النقط I ، J وَ K .

2. Ω النقطة من Δ . يعني أن Ω تبعد بنفس البعد عن النقط I ، J وَ K . وبما أن Ω تنتمي إلى المستوي (IJK) ، فإن Ω هي مركز الدائرة المحيطة بالمثلث IJK .

نعتبر الثلاثية $\left(A;\frac{1}{3}\overrightarrow{AD};\frac{1}{3}\overrightarrow{AB};\frac{1}{3}\overrightarrow{AE}\right)$ معلم للفضاء متعامد ومتجانس.

3. نعيّن احداثيات رؤوس المكعب. $A(0;0;0)$ ، $B(0;3;0)$ ، $C(3;3;0)$ ، $D(3;0;0)$ ، $E(0;0;3)$ ، $F(0;3;3)$ ، $G(3;3;3)$ ، $H(3;0;3)$.

إذاً: $I=\{(E;2);(F;1)\}$ معناه $I(0;1;3)$. $J=\{(B;2);(F;1)\}$ معناه $J(0;3;1)$.

$K=\{(G;2);(C;1)\}$ معناه $K(3;3;2)$.

4. نعتبر النقطتين $P(2;0;0)$ وَ $Q(1;3;3)$

(PQ) عمودي على المستوي (IJK) يكافئ الشعاع $\overrightarrow{PQ}$ يعامد الشعاعين $\overrightarrow{IJ}$ وَ

لدينا: $\overrightarrow{PQ}(-1;3;3)$ ، $\overrightarrow{IJ}(0;2;-2)$ وَ $\overrightarrow{IK}(3;2;-1)$

وبما أن: $\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{IJ}=0+6-6=0$ وَ $\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{IK}=-3+6-3=0$

فإن $\overrightarrow{PQ}\perp\overrightarrow{IJ}$ وَ $\overrightarrow{PQ}\perp\overrightarrow{IJ}$. وبالتالي المستقيم (PQ) عمودي على المستوي (IJK) .

5. نعتبر النقطة M من الفضاء احداثياها $(x;y;z)$.

أ- M نقطة من Δ معناه $MI=MJ=MK$

أي $\begin{cases} MI=MJ \\ MI=MK \end{cases}$ يكافئ $\begin{cases} x^2+(y-1)^2+(z-3)^2=x^2+(y-3)^2+(z-1)^2 \\ x^2+(y-1)^2+(z-3)^2=(x-3)^2+(y-3)^2+(z-2)^2 \end{cases}$

يكافئ $\begin{cases} y-z=0 \\ 3x+2y-z=6 \end{cases}$.

ينتج أن Δ هي عبارة عن المستقيم المعيّن بالتمثيل الديكارتي $\begin{cases} y-z=0 \\ 3x+2y-z=6 \end{cases}$

والذي هو تقاطع المستويين المحوريين للقطعتين $[IJ]$ وَ $[IK]$

ب- نعوض إحداثيات كلا من P وَ Q في التمثيل الديكارتي $\begin{cases} y-z=0 \\ 3x+2y-z=6 \end{cases}$

للمستقيم Δ . نجدهما تحققان.

إذاً : P وَ Q نقطتان من Δ .

6. أ- حسب ما سبق الشعاع $\overrightarrow{PQ}$ يعامد المستوي (IJK) . فهو شعاع ناظم له.

بما أن $\overrightarrow{PQ}(-1;3;3)$ فإن المستوي (IJK) له معادلة من الشكل: $-x+3y+3z+d=0$.

لإيجاد قيمة d نعوض احداثيات $I(0;1;3)$ في المعادلة كون $I\in(IJK)$ نجد:

$0+3+9+d=0$ أي $d=-12$ وبالتالي معادلة المستوي (IJK) هي:

$(IJK):\ -x+3y+3z-12=0$.

ب- النقطة Ω تنتمي إلى المستقيم Δ و إلى المستوي (IJK)، إذاً احداثياها هي حلول الجملة:

$$\begin{cases} y-z=0 \\ 3x+2y-z=6 \\ -x+3y+3z-12=0 \end{cases}$$ وبالتالي نجد $$\begin{cases} x=\dfrac{24}{19} \\ y=\dfrac{42}{19} \\ z=\dfrac{42}{19} \end{cases}$$ أي $\Omega\left(\dfrac{24}{19};\dfrac{42}{19};\dfrac{42}{19}\right)$.

الموضوع التاسع

بكالوريا علوم تجريبية ---- جوان 2007 ---- المغرب

التمرين 1 (3نقط)

$(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ معلم للفضاء متعامد ومتجانس. نعتبر (S) سطح الكرة معادلتها:

$$x^2+y^2+z^2-2x-4y-6z+8=0$$

وَ (P) المستوي الذي معادلته: $x-y+2z+1=0$

1. بيّن أن (S) مركزها $\Omega(1;2;3)$ ونصف قطرها $\sqrt{6}$.
2. تحقق من أن المستوي (P) مماس لسطح الكرة (S) .
3. أ) حدّد تمثيلا وسيطيا للمستقيم الذي يشمل النقطة Ω والعمودي على المستوي (P) .

ب) حدّد إحداثيات نقطة تماس (P) وَ (S) .

التمرين 2 (3نقط)

1. أ) اكتب على الشكل الجبري العدد المركّب $(3-2i)^2$.

ب) حل في مجموعة الأعداد المركّبة C المعادلة: $z^2-2(4+i)z+10+20i=0$.

2. نعتبر في المستوي المركّب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$، النقط A ، B وَ C والتي لواحقها على الترتيب هي: $a=1+3i$ ، $b=7-i$ وَ $c=5+9i$

ب) بيّن أن: $\dfrac{c-a}{b-a}=i$

ت) استنتج أن المثلث ABC قائم ومتساوي الساقين.

التمرين 3 (2.5 نقط)

1. تحقق أنه من أجل كل x من $R-\{-1\}$ ، $\dfrac{x^2}{x+1}=x-1+\dfrac{1}{x+1}$
2. بيّن أن: $\int_0^2\dfrac{x^2}{x+1}dx=\ln 3$.
3. باستعمال المكاملة بالتجزئة بيّن أن: $\int_0^2 x\ln(x+1)dx=\dfrac{3}{2}\ln 3$

التمرين 4 (2.5 نقط)

يحتوي كيس على سبع كرات تحمل الأرقام $1; 1; 1; -1; 0; 0; 0$ (لايمكن التمييز بين الكرات باللمس).

نعتبر التجربة العشوائية التالية: سحب عشوائيا وفي آن واحد ثلاث كرات من الكيس.

ونعتبر الحوادث التالية: A : "من بين الكرات الثلاث المسحوبة لا توجد أية كرة تحمل الرقم 0 ".

B : "سحب ثلاث كرات تحمل أرقام مختلفة مثنى مثنى ".

C : "مجموع الأرقام المسجلة على الكرات الثلاث المسحوبة معدوم".

احسب احتمال تحقق كلا من الحادثتين A وَ B ، ثم بيّن أن احتمال تحقق C هو: $\frac{2}{7}$.

المسـألة (9 نقط)

I. نعتبر الدالة العددية g المعرّفة على R بالدستور: $g(x)=e^{-x}+x-1$.

1. أحسب العدد $g'(x)$ لكل x من R، ثم استنتج أن g متزايدة تماما على $[0;+\infty[$ ومتناقصة تماما على $]-\infty;0]$.
2. بيّن أنه من أجل كل x من R، $g(x)\geq 0$ (لاحظ أن $g(0)=0$)

II. نعتبر الدالة العددية f للمتغيّر الحقيقي x المعرّفة بالدستور: $f(x)=\dfrac{x}{x+e^{-x}}$

وليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1. بيّن أن مجموعة تعريف الدالة f هي R.
2. أ) بيّن أنه: من أجل كل x من R^*، $f(x)=\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{xe^{x}}}$.

ب) بيّن أن: $\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$ وَ $\lim_{x\to-\infty} f(x)=1$. ثم فسّر هندسيا النتيجتين.

3. أ) بيّن أنه: من أجل كل x من R، $f'(x)=\dfrac{(x+1)e^{-x}}{(x+e^{-x})^2}$.

ب) ادرس اشارة العدد $f'(x)$ ، ثم ضع جدول تغيرات الدالة f .

4. أ) أكتب معادلة المماس للمنحني (C_f) عند المبدأ O.

ب) تحقق من أنه: من أجل كل x من R، $x-f(x)=\dfrac{xg(x)}{g(x)+1}$ ، ثم ادرس اشارة $(x-f(x))$ على R.

ج) استنتج الوضع النسبي للمنحني (C_f) والمستقيم (Δ) ذي المعادلة $y=x$.

5. أنشئ (Δ) وَ (C_f) . (نأخذ $\frac{1}{1-e}\approx -0.6$)

III. نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرّفة على مجموعة الأعداد الطبيعية N بـ: $u_0=1$ وَ $u_{n+1}=f(u_n)$.

1. بيّن بالتراجع أنه: من أجل كل n من N، $0\leq u_n\leq 1$.
2. بيّن أن المتتالية (u_n) متناقصة تماما على N .
3. استنتج أن (u_n) متقاربة، ثم حدّد نهايتها.

تصحيح الموضوع التاسع

بكالوريا علوم تجريبية ---- جوان 2007 ---- المغرب

التمرين 1 (4نقط)

$(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ معلم للفضاء متعامد ومتجانس.

1. $M(x;y;z)\in(S)$ يكافئ $x^2+y^2+z^2-2x-4y-6z+8=0$

يكافئ $x^2+-2x+1-1+y^2-4y+4-4+z^2-6z+9-9+8=0$

يكافئ $(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=\sqrt{6}^2$ أي $\Omega M=\sqrt{6}$ حيث $\Omega(1;2;3)$

إذاً: (S) مركزها $\Omega(1;2;3)$ ونصف قطرها $\sqrt{6}$.

2. المسافة بين المركز Ω والمستوي (P) هي: $\dfrac{|1-2+2(3)+1|}{\sqrt{1+1+4}}=\sqrt{6}$

إذاً (P) مماس لسطح الكرة (S).

3. نسمي (Δ) المستقيم الذي يشمل Ω والعمودي على (P)، وَ لدينا $\vec{n}(1;-1;2)$ شعاع الناظم للمستوي (P).

إذاً: $\vec{n}(1;-1;2)$ شعاع توجيه للمستقيم (Δ). وبالتالي التمثيل الوسيطي لـ (Δ)

يعطى بالجملة: $\begin{cases} x=1+k \\ y=2-k \\ z=3+2k \end{cases}$ / k وسيط حقيقي.

$M(x;y;z)\in(S)\cap(P)$ يكافئ $M(x;y;z)\in(\Delta)\cap(P)$

أي $x-y+2z+1=0$ و $\begin{cases}x=1+k\\ y=2-k\\ z=3+2k\end{cases}$ / k وسيط حقيقي.

يكافئ $(1+k)-(2-k)+2(3+2k)+1=0$ أي $k=-1$

وبالتالي: $M(0;3;1)$ نقطة تماس (P) و (S).

التمرين 2 (5نقط)

1. أ) $(3-2i)^2=9-12i-4=5-12i$

ب) المميّز المختصر للمعادلة $(E):\ z^2-2(4+i)z+10+20i=0$

هو $\Delta'=(4+i)^2-(10+20i)=5-12i=(3-2i)^2$

إذاً: حلّي المعادلة (E) هما: $z_1=\frac{4+i+3-2i}{1}=7-i$ و $z_2=\frac{4+i-3+2i}{1}=1+3i$

وبالتالي مجموعة الحلول هي: $s=\{7-i;1+3i\}$

2. في المستوي المركّب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$.

أ) $\frac{c-a}{b-a}=\frac{(5+9i)-(1+3i)}{(7-i)-(1+3i)}=\frac{4+6i}{6-4i}=\frac{i(6-4i)}{6-4i}=i$

ب) $\left|\frac{c-a}{b-a}\right|=|i|=1$ أي $\frac{AC}{AB}=1$ يعني $AC=AB$ و لدينا كذلك

$$(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})=\arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right)+2k\pi$$

أي $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})=\arg(i)+2k\pi=\frac{\pi}{2}+2k\pi$ / k عدد صحيح.

ينتج أن المثلث ABC قائم في A ومتساوي الساقين.

التمرين 3 (2.5 نقط)

1. من أجل كل x من $\mathbb{R}-\{-1\}$، $\frac{x^2}{x+1}=\frac{x^2-1+1}{x+1}=\frac{(x+1)(x-1)}{x+1}+\frac{1}{x+1}=x-1+\frac{1}{x+1}$

2. $\int_0^2\left(x-1+\frac{1}{x+1}\right)dx=\left[\frac{1}{2}x^2-x+\ln(x+1)\right]_0^2=\ln 3$.

3. نضع: $\begin{cases}u(x)=\ln(x+1)\\ v'(x)=x\end{cases}$ ينتج أن $\begin{cases}u'(x)=\frac{1}{x+1}\\ v(x)=\frac{1}{2}x^2\end{cases}$ بما أن الدالتان u و v

مستمرتان وقابلتان للإشتقاق على $[0.2]$ فحسب قاعدة المكاملة بالتجزئة نجد:

$$\int_0^2 x\ln(x+1)dx=\int_0^2 u(x)v'(x)dx=[u(x)v(x)]_0^2-\int_0^2 v(x)u'(x)dx$$

$$=\left[\frac{1}{2}x^2\ln(x+1)\right]_0^2-\frac{1}{2}\int_0^2\frac{x^2}{x+1}dx=2\ln 3-\frac{1}{2}\ln 3=\frac{3}{2}\ln 3$$

التمرين 4

(1) (1) (1) (-1) (0) (0) (0)

نسمي $(\Omega;p)$ فضاء احتمالي منته. لدينا: $Card(\Omega)=C_7^3=35$

حساب احتمال الحوادث:

A : " من بين الكرات الثلاث المسحوبة لا توجد أية كرة تحمل الرقم 0 ".

$$p(A)=\frac{Card(A)}{Card(\Omega)}=\frac{C_4^3}{35}=\frac{4}{35}$$

B : " سحب ثلاث كرات تحمل أرقام مختلفة مثنى مثنى ".

$$p(B)=\frac{Card(B)}{Card(\Omega)}=\frac{C_3^1\times C_1^1\times C_3^1}{35}=\frac{9}{35}$$

C :"مجموع الأرقام المسجلة على الكرات الثلاث المسحوبة معدوم".

$$p(C)=\frac{Card\,(C)}{Card\,(\Omega)}=\frac{C_3^3+\left(C_3^1\times C_1^1\times C_3^1\right)}{35}=\frac{10}{35}=\frac{2}{7}\ .$$

المسألة

I. $g(x)=e^{-x}+x-1$ معرّفة على $\mathbb{R}$.

1. من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $g'(x)=-e^{-x}+1$ ندرس اشارته.

$g'(x)=0$ يكافئ $e^{-x}=1$ أي $x=0$.

في المجال $[0;+\infty[$ لدينا $x\geq 0$ أي $-x\leq 0$ منه $e^{-x}\leq 1$ أي $g'(x)\geq 0$

يعني أن g متزايدة تماما على $]0;+\infty[$.

في المجال $]-\infty;0]$ لدينا $x\le 0$ أي $-x\ge 0$ منه $e^{-x}\ge 1$ أي $g'(x)\le 0$

يعني أن g متناقصة تماما على $]-\infty;0]$.

2. من أجل كل x من $\mathbb{R}_+$، $x\ge 0$ منه $g(x)\ge g(0)$ أي $g(x)\ge 0$.

(كون g متزايدة تماما على $[0;+\infty[$)

من أجل كل x من $\mathbb{R}_-$، $x\le 0$ منه $g(x)\ge g(0)$ أي $g(x)\ge 0$.

(كون ومتناقصة تماما على $]-\infty;0]$). إذاً من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $g(x)\ge 0$

II. نعتبر الدالة العددية f للمتغيّر الحقيقي x المعرّفة بالدستور: $f(x)=\frac{x}{x+e^{-x}}$

1. f معرّفة إذا وفقط إذا كان $x+e^{-x}\neq 0$. لدينا مما سبق، من أجل كل x من $\mathbb{R}$،

$g(x)\ge 0$

أي $e^{-x}+x-1\ge 0$ إذاً: $e^{-x}+x\ge 1$ وبالتالي: $D_f=\mathbb{R}$

2. أ- من أجل كل x من $\mathbb{R}^*$، $\frac{1}{1+\frac{1}{xe^x}}=\frac{1}{\frac{xe^x+1}{xe^x}}=\frac{xe^x}{e^x(x+e^{-x})}=\frac{x}{x+e^{-x}}=f(x)$

ب- $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{xe^x}}\right)=1$ كون $\lim_{x\to+\infty} xe^x=+\infty$ وَ $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{xe^x}=0$

$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{xe^x}}\right)=0^-$ كون $\lim_{x\to-\infty} xe^x=0^-$ وَ $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{xe^x}=-\infty$

نستنتج من هذا الحساب أن المنحني (C_f) يقبل مستقيم مقارب بجوار $+\infty$ معادلته $y=1$ وَ مستقيم مقارب بجوار $-\infty$ معادلته $y=0$.

3. أ- من أجل كل x من $\mathbb{R}$،

$$f'(x)=\frac{(x)'(x+e^{-x})-x(x+e^{-x})'}{(x+e^{-x})^2}=\frac{x+e^{-x}-x(1-e^{-x})}{(x+e^{-x})^2}=\frac{(x+1)e^{-x}}{(x+e^{-x})^2}$$

ب- إشارة $f'(x)$ هي إشارة العدد $(x+1)$ وبالتالي نضع الاشارة في جدول التغيرات مباشرة كما يلي في الشكل المقابل:

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f'(x)$			0	$+$	
$f(x)$	0^-	↘	$\frac{1}{1-e}$	↗	1

4. أ- معادلة المماس للمنحني (C_f) عند المبدأ O.

$y=f'(0)(x-0)+f(0)$ أي: $y=x$

ب- من أجل كل x من $\mathbb{R}$،

$$x-f(x)=x-\frac{x}{x+e^{-x}}=x\left(1-\frac{1}{x+e^{-x}}\right)=x\frac{x-1+e^{-x}}{x+e^{-x}}=\frac{xg(x)}{g(x)+1}$$

بما أنه: من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $g(x)\ge 0$ (حسب ما سبق) فإن:

إشارة $(x-f(x))$ هي إشارة x على $\mathbb{R}$. حسب الجدول التالي:

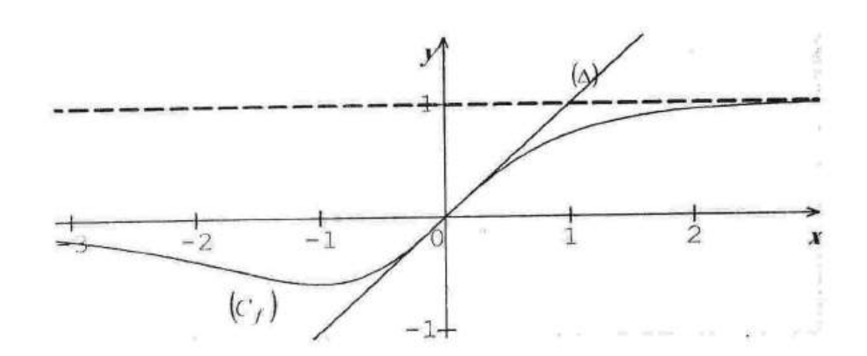
x	$-\infty$		0		$+\infty$
$(x-f(x))$		$-$	0	$+$	

ج- تعرّف على وضعية (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ) الذي معادلته $y=x$ من خلال إشارة الفرق $(x-f(x))$.

حسب السؤال السابق لدينا: (C_f) يقطع (Δ) عند النقطة ذات الفاصلة 0.

(C_f) يقع فوق (Δ) على المجال $]-\infty;0[$ وَ (C_f) يقع تحت (Δ) على المجال $]0;+\infty[$.

5. رسم (Δ) وَ (C_f).



III. (u_n) المتتالية العددية المعرّفة على N بـ: $u_0=1$ وَ $u_{n+1}=f(u_n)$.

1. من أجل $n=0$ لدينا $u_0=1$ أي $0\le u_0\le 1$ محقّقة.

نفرض أن $0\le u_k\le 1$ محققة إلى الرتبة k ونبيّن أن $0\le u_{k+1}\le 1$ محقّقة.

لدينا: $0\le u_k\le 1$ منه $f(0)\le f(u_k)\le f(1)$ كون f متزايدة بالخصوص على $[0;1]$.

وبما أن (C_f) يقع تحت (Δ) على الخصوص في المجال $[0;1]$. فإن $f(1)\le 1$ ينتج أن: $0\le u_{k+1}\le 1$ وهو المطلوب

إذاً من أجل كل n من N، $0\le u_n\le 1$.

2. مما سبق لدينا: من أجل كل x من $[0;1]$، $f(x)\le x$ (من دراسة الوضعية النسبية)

ومن السؤال السابق لدينا: من أجل كل n من N، $0\le u_n\le 1$.

بما أن $u_n\in[0;1]$ فإن $f(u_n)\le u_n$ من أجل كل n من N، أي: $u_{n+1}\le u_n$

يعني أن المتتالية (u_n) متناقصة تماما على N.

3. بما أن المتتالية (u_n) متناقصة تماما على N ومحدودة من الأسفل بالعدد 0، فإنها متقاربة نحو العدد l، حيث $l\ge 0$.

الموضوع العاشر

بكالوريا علوم تجريبية ---- جوان 2007 ---- فرنسا

التمرين 1 (3نقط)

الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$.

نعتبر المستويين (P) وَ(P') اللذين معادلتهما $x+2y-z+1=0$ وَ $-x+y+z=0$ على الترتيب والنقطة A ذات الاحداثيات $(0;1;1)$.

1. بيّن أن المستويين (P) وَ(P') متعامدين.
2. نعتبر المستقيم (D) الذي تمثيله الوسيطي $\begin{cases} x=-\frac{1}{3}+t \\ y=-\frac{1}{3} \\ z=t \end{cases}$ حيث t وسيط حقيقي

بيّن أن المستويين (P) وَ(P') يتقاطعان وفق (D).

3. أحسب المسافة بين النقطة A وكل من المستويين (P) وَ(P').
4. استنتج المسافة بين النقطة A والمستقيم (D).

التمرين 2 (3نقط)

1. من الدرس: بيّن دستور المكاملة بالتجزئة باستعمال مشتق جداء دالتين مستمرتين وقابلتين للاشتقاق على المجال $[a;b]$.
2. نعتبر التكاملين المعرّفين بما يلي: $I=\int_0^\pi e^x\sin x\,dx$ وَ $J=\int_0^\pi e^x\cos x\,dx$.

أ- بيّن أن: $I=-J$ وَ $I=J+e^\pi+1$

ب- استنتج القيمة المظبوطة لكل من I وَ J.

التمرين 3 (5 نقط)

الجـــزء A

نعبر المعادلة (E): $z^3-(4+i)z^2+(13+4i)z-13i=0$ حيث z عدد مركب.

1. بيّن أن العدد المركّب i هو حلا للمعادلة (E).

2. عيّن الأعداد الحقيقية a ، b ، c بحيث يكون من أجل كل عدد مركّب z لدينا:

$$z^3-(4+i)z^2+(13+4i)z-13i=(z-i)(az^2+bz+c)$$

3. استنتج حلول المعادلة (E).

الجـــزء B

في المستوي المركّب المزوّد بالمعلم المتعامد والمتجانس المباشر $(O;\vec{u};\vec{v})$، نعتبر النقط A ، B وَ C صور الاعداد i ، $2+3i$ وَ $2-3i$ على الترتيب.

1. r الدوران الذي مركزه B وزاويته $\frac{\pi}{4}$، عيّن لاحقة النقطة A' صورة النقطة A بالدوران r.

2. بيّن أن النقط A' ، B وَ C على استقامة واحدة، ثم اعط العبارة المركبة للتحاكي الذي مركزه B ويحوّل النقطة C إلى النقطة A' .

التمرين 4 (4 نقط)

لكل سؤال من الأسئلة الأربعة 1; 2 ; 3 وَ 4 هناك أربعة اجوبة مقترحة (جواب واحد صحيح).
المترشح يضع على ورقة الاجابة رقم السؤال والعبارة التي يراها صحيحة. لا يطلب أي تعليل.
كل جواب صحيح علامته 1 وَ كل جواب غيرصحيح علامته 0.
في بعض الأسئلة ، الأجوبة المقترحة مدوّرة إلى 10^{-3}.

1. ممثل تجاري يعرض منتوجا للبيع.

دراسة احصائية خلصت إلى أنه كلما عرض هذا الممثل التجاري منتوجه على مشتر، كان احتمال بيعه للمنتوج يساوي 0.2 .

يتعامل بمعدّل خمس زبائن في اليوم، احتمال أن يبيع بالظبط منتوجين في اليوم هو:

(أ): 0.4 ، (ب): 0.04 ، (ج): 0.1024 ، (د): 0.2048

2. يمثّل الذكور في قسم ما ربع التلاميذ.من بين كل ثلاث تلميذات واحدة تحصّلت على رخصة السياقة في المرّة الأولى،بينما يوجد تلميذ واحد ذكر من كل عشرة تلاميذ ذكور حصل على رخصة السياقة في المرة الأولى. يُسأل تلميذاً (ذكر أو أنثى) عشوائيا من مجموع تلاميذ القسم، احتمال كونه حصل على الرخصة في المرة الأولى هو:

(أ): 0.043 ، (ب): 0.275 ، (ج): 0.217 ، (د): 0.033

3. باستعمال معطياة السؤال (2) ، يُسئل تلميذا عشوائيا من بين التلاميذ الذين حصلوا على رخصة السياقة في المرة الأولى، احتمال أن يكون هذا التلميذ ذكراً هو:

(أ): 0.1 ، (ب): 0.091 ، (ج): 0.111 ، (د): 0.25

4. أحد الرماة يحاول إصابة هدف دائري يضم ثلاثة مجالات دائرية ذات نفس المركز وأنصاف قطر 10، 20 وَ30 سنتمتر، نفرض أن احتمال اصابة كل مجال متناسب مع مساحة هذا المجال وأن اللاعب يصيب دائما الهدف.

إن احتمال اصابة اللاعب لأبعد هدف عن المركز هو:

(أ): $\frac{5}{9}$ ، (ب): $\frac{9}{14}$ ، (ج): $\frac{4}{7}$ ، (د): $\frac{1}{3}$

التمرين 5 (5 نقط)

f الدالة العددية المعرّفة على المجال $]-1;+\infty[$ بالدستور: $f(x)=x-\frac{\ln(x+1)}{x+1}$

(C_f) التمثيل البياني للدالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$ معطى في نهاية التمرين، يطلب اكماله وتقديمه مع ورقة الاجابة.

الجـــزء A **: دراسة بعض خواص المنحني** (C_f).

1. يرمز f' إلى مشتقة الدالة f . أحسب $f'(x)$ من أجل كل x من $]-1;+\infty[$.

2. من أجل كل x من $]-1;+\infty[$ ، نضع: $N(x)=(1+x)^2-1+\ln(1+x)$

تحقق اننا عرّفنا دالة N متزايدة تماما على المجال $]-1;+\infty[$.

أحسب $N(0)$ ، واستنتج إتجاه تغيّر الدالة f على المجال $]-1;+\infty[$.

3. D المستقيم الذي معادلته $y=x$. احسب احداثيات نقط تقاطع المنحني (C_f) مع المستقيم D .

الجـــزء B **: دراسة متتالية تراجعية معرّفة بواسطة الدالة** f .

1. بيّن انه: إذا كان $x\in[0;4]$ فإن $f(x)\in[0;4]$

2. نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرّفة بـــ: $u_0=4$ وَ من أجل كل n من N ،

$$u_{n+1}=f(u_n)$$

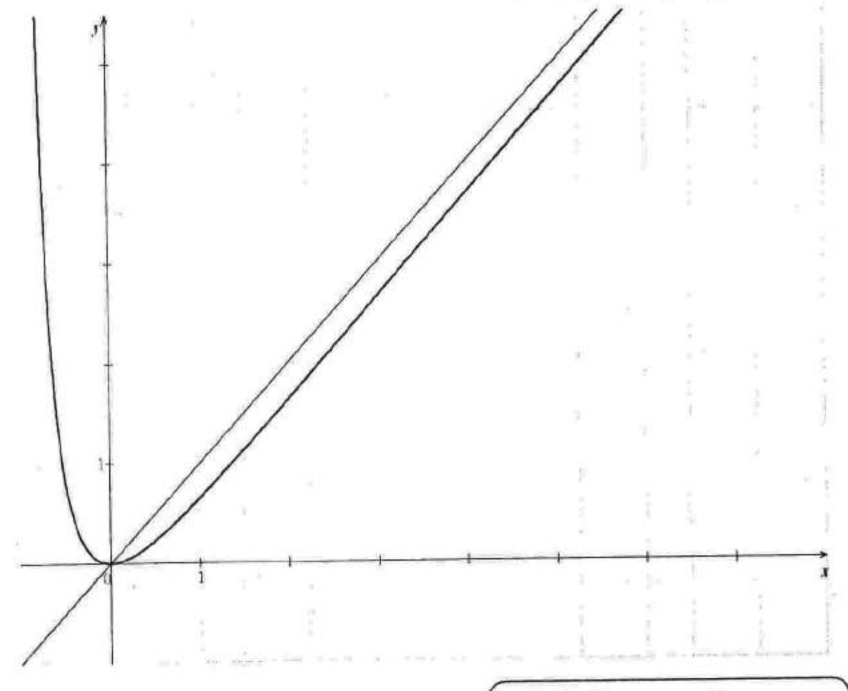
أ- باستعمال التمثيل البياني (C_f) والمستقيم D ، ضع على المنحني (C_f) النقط ذات الفواصل u_0 ، u_1 ، u_2 وَ u_3 .

ب- بيّن أنه من أجل كل n من N ، $u_n \in [0;4]$.

ج- ادرس رتابة المتتالية (u_n) .

د- بيّن أن المتتالية (u_n) متقاربة، نرمز بـ l لنهايتها.

و- استعمل **الجزء** A لإيجاد قيمة l.



تصحيح الموضوع العاشر

بكالوريا علوم تجريبية --- جوان 2007 --- فرنسا

التمرين1 (3نقط)

الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$.

1. $\vec{n}(1;2;-1)$ شعاع ناظم للمستوي (P) ، $\vec{n}'(-1;1;1)$ شعاع ناظم للمستوي (P') .

لدينا: $\vec{n}\cdot\vec{n}'=-1+2-1=0$ معناه $\vec{n}\perp\vec{n}'$ وبالتالي المستويان (P) وَ (P') متعامدان.

2. لدينا: $\left(-\frac{1}{3}+t\right)+2\left(-\frac{1}{3}\right)-t+1=0$ معناه $(D)\subset(P)$

وَ $-\left(-\frac{1}{3}+t\right)+\left(-\frac{1}{3}\right)+t=0$ معناه $(D)\subset(P')$ وبما أن (P) وَ (P')

متعامدان فهما يتقاطعان وفق (D) .

3. المسافة بين A وَ (P) هي: $\frac{|0+2-1+1|}{\sqrt{1+4+1}}=\frac{2}{\sqrt{6}}$ ،

المسافة بين A وَ (P') هي: $\frac{|0+1+1|}{\sqrt{1+1+1}}=\frac{2}{\sqrt{3}}$.

4. استنتاج المسافة بين A والمستقيم (D) .

نعتبر A' المسقط العمودي للنقطة A على المستوي (P)، وَ A'' المسقط العمودي للنقطة A على المستوي (P') وَ B المسقط العمودي للنقطة A على المستقيم (D) .

لدينا في المثلث ABA' القائم في A' وَحسب علاقة فيتاغورث *pythagore* :

المسافة بين A والمستقيم (D) هي: $AB=\sqrt{AA'^2+AA''^2}=\sqrt{\left(\frac{2}{\sqrt{6}}\right)^2+\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2}=\sqrt{2}$.

التمرين 2 (3نقط)

1. u وَ v دالتان قابلتان للاشتقاق على المجال $[a;b]$، u' وَ v' دالتهما المشتقة على الترتيب مستمرتان على $[a;b]$.

لدينا: uv دالة قابلة للاشتقاق على $[a;b]$ وَ $(uv)'=u'v+v'u$

وبما أن الدوال $u'v$ ، $v'u$ وَ $(uv)'$ مستمرة على $[a;b]$ فإنه بامكاننا أن نكامل.

نجد: $\int_a^b (uv)'=\int_a^b (u'v+v'u)$ يعني أن $[uv]_a^b=\int_a^b u'v+\int_a^b v'u$ كون uv دالة أصلية للدالة $(uv)'$ على $[a;b]$.

ينتج أن: $\int_a^b u'v=[uv]_a^b-\int_a^b v'u$

2. أ- باستعمال دستور المكاملة بالتجزئة نبسّط عبارة I .

نضع: $\begin{cases}u(x)=e^x\\ v'(x)=\sin x\end{cases}$ ينتج أن $\begin{cases}u'(x)=e^x\\ v(x)=-\cos x\end{cases}$

$$I=\int_0^\pi e^x\sin x\,dx=\int_0^\pi u(x)v'(x)dx$$

وبالتالي

$$=\left[-e^x\cos x\right]_0^\pi+\int_0^\pi e^x\cos x\,dx=e^\pi+1+J$$

أي $I=J+e^\pi+1$

$$I+J=\int_0^{\pi} e^x(\sin x+\cos x)dx=\sqrt{2}\int_0^{\pi} e^x\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)dx=$$

باستعمال المكاملة بالتجزئة وبعد وضع:

$$\begin{cases} u(x)=e^x \\ v'(x)=\cos(x-\frac{\pi}{4}) \end{cases}$$ ينتج أن $$\begin{cases} u'(x)=e^x \\ v(x)=\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right) \end{cases}$$

إذاً: $I+J=\sqrt{2}\left(\left[e^x\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\right]_0^{\pi}-\int_0^{\pi}e^x\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)dx\right)=0$ أي $I=-J$

ب- نحل جملة المعادلتين: $\begin{cases} I=J+e^{\pi}+1 \\ I=-J \end{cases}$ نجد $\begin{cases} J=-\frac{1}{2}\left(e^{\pi}+1\right) \\ I=\frac{1}{2}\left(e^{\pi}+1\right) \end{cases}$

التمرين 3 (5 نقط)

الجزء A

نعتبر المعادلة $(E):\quad z^3-(4+i)z^2+(13+4i)z-13i=0$ حيث z عدد مركب.

1. لدينا: $i^3-(4+i)i^2+(13+4i)i-13i=-i+(4+i)+13i-4-13i=0$

معناه i هو حلا للمعادلة (E).

2. من أجل كل عدد مركّب z،

$$z^3-(4+i)z^2+(13+4i)z-13i=(z-i)\left(az^2+bz+c\right)$$
$$=az^3+(b-ia)z^2+(c-ib)z-ic$$

بالمطابقة نجد: $a=1$ وَ $b-ia=-4-i$ وَ $c-ib=13+4i$ وَ $-ic=-13i$

أي: $a=1$ وَ $b=-4$ وَ $c=13$

3. استنتاج حلول المعادلة (E). لدينا $(E):(z-i)\left(z^2-4z+13\right)=0$

تكافئ ($z=i$ أو $z^2-4z+13=0$)

$\Delta'=-9=(3i)^2$. حلّي المعادلة $z^2-4z+13=0$ هما: $z_1=2-3i$ وَ $z_2=2+3i$

وبالتالي مجموعة حلول (E) هي: $S=\{i;2+3i;2-3i\}$

الجزء B

المستوي المركّب مزوّد بالمعلم المتعامد والمتجانس المباشر $(O;\vec{u};\vec{v})$. النقط A، B وَ C صور الاعداد

i، $2+3i$ وَ $2-3i$ على الترتيب.

1. $M'(z')$ صورة $M(z)$ بالدوران r يعطى العبارة: $z'-z_B=e^{i\frac{\pi}{4}}(z-z_B)$

إذاً: $z_{A'}-z_B=e^{i\frac{\pi}{4}}(z_A-z_B)$

وبالتالي: $z_{A'}=\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)(-2-2i)+2+3i=2+(3-2\sqrt{2})i$

إذاً لاحقة A' هي $2+(3-2\sqrt{2})i$.

2. لاحقة الشعاع $\overrightarrow{BC}$ هي: $z_C-z_B=-6i$ وَ لاحقة الشعاع $\overrightarrow{BA'}$ هي: $z_{A'}-z_B=-2\sqrt{2}\,i$

لدينا: $-6i=\frac{3}{\sqrt{2}}\left(-2\sqrt{2}\,i\right)$ أي الشعاعان $\overrightarrow{BC}$ وَ $\overrightarrow{BA'}$ متوازيان، وبالتالي النقط A'، B وَ C على استقامة واحدة. ولدينا $z_C-z_B=\frac{3}{\sqrt{2}}(z_{A'}-z_B)$ العبارة المركّبة للتحاكي المطلوب.

التمرين 4 (4 نقط)

1. احتمال أن يبيع بالظبط منتوجين في اليوم هو

$p(X=2)=C_5^2(0.2)^2\times(1-0.2)^3\approx0.2048$ الاجابة (د).

2. احتمال كون التلميذ حصل على الرخصة في المرة الأولى

هو: $p(M)+p(F)=0.025+0.25=0.275$ الاجابة (ب).

3. احتمال أن يكون التلميذ ذكراً علما أنه حصل على الرخصة في المرة الأولى

هو: $p_P(M)=\frac{0.025}{0.275}\approx0.091$ الاجابة (ب).

4. احتمال اصابة اللاعب لأبعد هدف عن المركز هو: $\frac{9}{14}$. الاجابة (ب).

نجده بحل جملة ثلاث معادلات: $\begin{cases} \frac{p_1}{1}=\frac{p_3}{9} \\ \frac{p_2}{4}=\frac{p_3}{9} \\ p_1+p_2+p_3=1 \end{cases}$ تكافئ $p_3=\frac{9}{14}$

التمرين 5 (5 نقط)

f الدالة العددية المعرّفة على المجال $]-1;+\infty[$ بالدستور: $f(x)=x-\frac{\ln(x+1)}{x+1}$

الجزء A : دراسة بعض خواص المنحني (C_f) .

1. من أجل كل x من $]-1;+\infty[$.

$$f'(x)=1-\frac{\frac{1}{x+1}(x+1)-\ln(x+1)}{(x+1)^2}=1-\frac{1-\ln(x+1)}{(x+1)^2}$$

2. من أجل كل x من $]-1;+\infty[$ ، $N(x)=(1+x)^2-1+\ln(1+x)$

وَ $N'(x)=2(1+x)+\frac{1}{x+1}=\frac{2(x+1)^2+1}{x+1}$

لدينا $N'(x)>0$ كون $x+1>0$ يعني أن الدالة N معرّفة ومتزايدة تماماً على $]-1;+\infty[$.

$N(0)=1-1=0$ وبما أن $f'(x)=\frac{N(x)}{(x+1)^2}$ فإن إشارة $f'(x)$ هي إشارة $N(x)$ المعطاة بالجدول التالي:

x	-1	0	$+\infty$
$N(x)$	↗	0	↗

إذاً f متزايدة تماما على المجال $[0;+\infty[$ ، ومتناقصة تماما على المجال $]-1;0]$.

3. $M(x;y)$ نقطة تقاطع (C_f) مع المستقيم D معناه $\begin{cases} y=f(x) \\ y=x \end{cases}$

يكافئ $\begin{cases} x=f(x) \\ y=x \end{cases}$ يكافئ $\begin{cases} \ln(x+1)=0 \\ y=x \end{cases}$ يكافئ $\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$

أي $M(0;0)$ هي نقطة تقاطع (C_f) وَ D .

الجزء B : دراسة متتالية تراجعية معرّفة بواسطة الدالة f .

1. الدالة f مستمرة و متزايدة تماما على المجال $[0;+\infty[$ وبالخصوص على $[0;4]$

إذاً: إذا كان $x\in[0;4]$ فإن $f(x)\in[f(0);f(4)]$ ولدينا: $f(0)=0$ وَ $f(4)\approx 3.68$

أي $f(x)\in[0;3.68]\subset[0;4]$.

2. $u_0=4$ وَ من أجل كل n من N ، $u_{n+1}=f(u_n)$

أ- الرسم في نهاية التمرين.

ب- $u_0\in[0;4]$ محققة. نفرض أن $u_k\in[0;4]$ محققة إلى الرتبة k .

باستعمال السؤال السابق بما ان $u_k\in[0;4]$ فإن $f(u_k)\in[0;4]$ أي $u_{k+1}\in[0;4]$

إذاً: من أجل كل n من N ، $u_n\in[0;4]$.

ج- من أجل كل n من N ، $u_{n+1}-u_n=f(u_n)-u_n\le 0$

كون (C_f) تحت D في المجال $[0;4]$. حسب ما سبق (أو من الرسم)

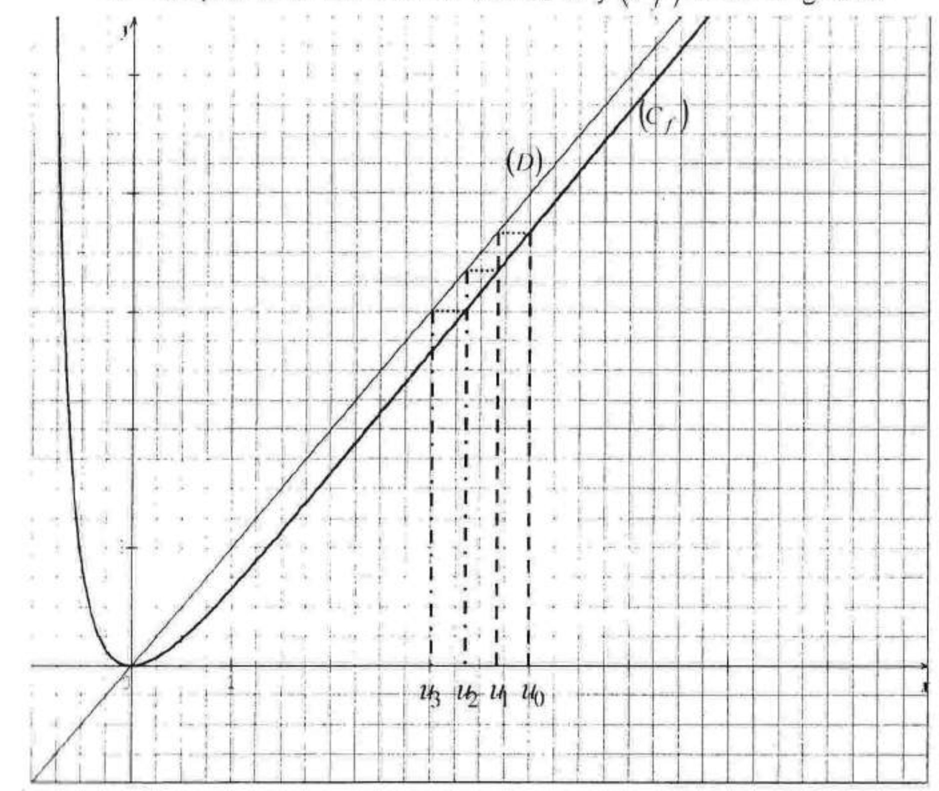
إذاً: (u_n) متناقصة تماما على N .

د- بما أن المتتالية (u_n) متناقصة تماما على N ومحدودة من الأسفل بالعدد 0 فهي متقاربة نحو l . حيث: $l\ge 0$

و- لدينا: $l=\lim_{+\infty} u_{n+1}=\lim_{+\infty} f(u_n)=f(\lim_{+\infty} u_n)=f(l)$

وبما أن الحل الوحيد للمعادلة $f(x)=x$ هو 0، فــإن $l=0$.

كما يمكن ملاحظة أن: (C_f) وَ D يتقاطعان عند النقطة ذات الفاصلة 0 .فإن $l=0$.



المشتقات والدوال الأصلية

- الدوال: اللوغاريتم النيبيري، الأسية ، القوة

$$\ln'(x)=\frac{1}{x} \text{ ، } \exp'(x)=e^x \text{ ، } (x^n)'=nx^{n-1}$$

- دساتير الاشتقاقية

$$(uv)'=u'v+v'u \text{ ، } \left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-v'u}{v^2} \text{ ، } (g\circ u)'=u'\times(g'\circ u).$$

$$(u^n)'=nu'(u^{n-1}) \text{ ، } (\ln u)'=\frac{u'}{u} \text{ ، } (e^u)'=u'e^u.$$

- الدوال المثلثية

$$\sin'(x)=\cos x \text{ ، } \cos'(x)=-\sin x \text{ ، } \tan'(x)=1+\tan^2(x)=\frac{1}{\cos^2 x}.$$

- دساتير المكاملة

$\frac{u'}{u}$ دوالها الأصلية هي $\ln|u|+k$.

$u'u^n$ دوالها الأصلية هي $\frac{1}{n+1}u^{n+1}$ / $n\neq -1$.

اللوغاريتم والأسية

الدالتين exp وَ ln متعاكستين إحداها بالنسبة للأخرى: من اجل x وَ y حقيقيان

وَ $x>0$، $y=\ln x$ يكـــافئ $x=e^y$

$$\lim_{+\infty}\ln x=+\infty \text{ ، } \lim_{0^+}\ln x=-\infty \text{ . } \lim_{+\infty}e^x=+\infty \text{ ، } \lim_{-\infty}e^x=0^+.$$

$$\lim_{+\infty}\frac{\ln x}{x}=0^+ \text{ ، } \lim_{0^+}x\ln x=0^- \text{ . } \lim_{+\infty}\frac{e^x}{x}=+\infty \text{ ، } \lim_{-\infty}xe^x=0^-.$$

الدالة الأسية ذات الأساس a ($a>0$ وَ $a\neq 1$)

$$a^x=e^{x\ln a} \text{ ، } a^0=1 \text{ ، } a^xa^y=a^{x+y} \text{ ، } \frac{a^x}{a^y}=a^{x-y} \text{ ، } (a^x)^y=a^{xy}$$

الدالة ln

$$\ln 1=0 \text{ ، } \ln e=1 \text{ ، } \ln xy=\ln x+\ln y \text{ ، } \ln\left(\frac{x}{y}\right)=\ln x-\ln y \text{ ، } \ln(x^n)=n\ln x$$

تكامل دالة مستمرة

- $\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$ حيث F دالة أصلية للدالة f على مجال I يضم a وَ b.
- القيمة المتوسطة للدالة f على المجال $[a;b]$: $\mu=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$.
- علاقة شال: $\int_a^b f(x)dx+\int_b^c f(x)dx=\int_a^c f(x)dx$.
- الخطية: $\int_a^b[\alpha f(x)+\beta g(x)]dx=\alpha\int_a^b f(x)dx+\beta\int_a^b g(x)dx$.
- الايجابية: إذا كانت $f\geq 0$ وَ $a\leq b$ فـإن $\int_a^b f(x)dx\geq 0$.
- المكاملة بالتجزئة: $\int_a^b u(x)v'(x)dx=[u(x)v(x)]_a^b-\int_a^b v(x)u'(x)dx$.

المعادلة التفاضلية $y'=ay+b$

- الحلول على R للمعادلة التفاضلية $y'=ay+b$ حيث a وَ b عددان حقيقيان هي الدوال $x\mapsto\alpha+Ke^{ax}$ حيث K عدد حقيقي وَ الدالة الثابتة $x\mapsto\alpha$ حلا لها.
- بالخصوص الحلول على R للمعادلة التفاضلية $y'=ay$ هي الدوال $x\mapsto Ke^{ax}$ حيث K حقيقي.

الاعداد المركّبة

- الشكل الجبري: $z=x+iy$ حيث x وَ y عددان حقيقيان.
- الشكل المثلثي: $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ حيث $r>0$ وَ θ عدد حقيقي.
- الشكل الأسي: $z=re^{i\theta}$ حيث $r>0$ وَ θ عدد حقيقي.
- الجزء الحقيقي: $\mathrm{Re}(z)=x=r\cos\theta$.
- الجزء التخيلي: $\mathrm{Im}(z)=y=r\sin\theta$.

$(O;\vec{u};\vec{v})$ معلم للمستوي متعامد ومتجانس. M صورة العدد المركّب z .

- الطويلة: $|z|=r=OM=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{z\bar{z}}$.
- عمدة: $\arg(z)=\theta=(\vec{u};\overrightarrow{OM})+2k\pi$ / k عدد صحيح.
- المرافق: $\bar{z}=x-iy$.
- الحساب في C.

$$\overline{zz'}=\bar{z}\,\bar{z'} \text{ ، } \overline{z+z'}=\bar{z}+\bar{z'} \text{ ، } |zz'|=|z|\times|z'| \text{ ، } \left|\frac{z}{z'}\right|=\frac{|z|}{|z'|} \text{ ، } |z+z'|\leq|z|+|z'|.$$

$$e^{i\theta}e^{i\theta'}=e^{i(\theta+\theta')} \text{ ، } \frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}}=e^{i(\theta-\theta')} \text{ ، } e^{i\theta}=\frac{1}{e^{-i\theta}}=e^{\overline{-i\theta}} \text{ ، } |e^{i\theta}|=1.$$

- العبارة المركّبة للتحويلات النقطية المألوفة.
  - التناظر المحوري $S_{(Ox)}$: $z' = \overline{z}$
  - الانسحاب $t_{\vec{w}}$: $z' = z + b$ حيث b لاحقة شعاع الانسحاب $\vec{w}$.
  - الدوران $R_{\Omega,\theta}$: $z'-\omega = e^{i\theta}(z-\omega)$ حيث ω لاحقة المركز Ω .
  - التحاكي $h_{\Omega,k}$: $z'-\omega = k(z-\omega)$ حيث ω لاحقة المركز Ω .

الجداء السلمي في الفضاء

- في المعلم المتعامد والمتجانس: إذا كان $\vec{u}(x;y;z)$ و $\vec{v}(x';y';z')$ فإن $\vec{u}\cdot\vec{v} = xx'+yy'+zz'$.
- إذا كان θ قيسا للزاوية $(\vec{u};\vec{v})$ فإن $\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|\times\cos\theta$.
- إذا كانت A ، B ، C و H نقط من الفضاء حيث $A \neq B$ و H المسقط العمودي للنقطة C على (AB) . فإن $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AH}$
- علاقة الكاشي: في المثلث ABC ، $AB^2 = AC^2+BC^2-2AC\times BC\times\cos(\overrightarrow{AC};\overrightarrow{BC})$.

معادلات في المستوي أو في الفضاء

- في المعلم المتعامد والمتجانس للمستوي.
  - المستقيم (D) له معادلة من الشكل: $ax+by+c=0$ حيث a و b غير معدومين معا.
    شعاع توجيه (D) هو: $\vec{d}(-b;a)$ ، شعاع ناظم على (D) هو: $\vec{n}(a;b)$.
  - الدائرة (c) لها معادلة من الشكل: $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$.
    مركز (c) هو: $\Omega(a;b)$ ، نصف قطر (c) هو: r
- في المعلم المتعامد والمتجانس للفضاء.
  - المستوي (P) له معادلة من الشكل: $ax+by+cz+d=0$ حيث a ، b و c ليست كلها معدومة.
    شعاع ناظم على (P) هو: $\vec{n}(a;b;c)$
  - اسطوانة دورانية محورها (Oz) و نصف قطرها r لها معادلة من الشكل: $x^2+y^2=r^2$.
  - مخروط دوراني رأسه O ومحوره (Oz) له معادلة من الشكل:
    $x^2+y^2-kz^2=0$ مع $k>0$.
  - سطح الكرة له معادلة من الشكل: $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2$
    مركزها هو: $\Omega(a;b;c)$ ، نصف قطرها هو: r

الآلة الحاسبة البيانية المبرمجة $TI-83$ plus

اللمسات الصفراء: أضغط أولا على [2nd]. للعودة إلى شاشة الحساب أضغط على [QUIT].

اللمسات الخضراء: أضغط أولا على [ALPHA]. للعودة إلى شاشة الحساب أضغط على نفس اللمسة.

■ الدوال

الدستور: نعتبر $f(x)=3x-2+\dfrac{1}{x-2}$ نحجز $f(x)$ عند اللمسة [Y=].

لإظهار المتغيّر x استعمل اللمسة [X,T,θ,n].

بشرط أن يكون [MODE] مثبت عند Func .

```
Plot1   Plote2   Plot3
\Y1=3X-2+1/(X-2)
\Y2=
\Y3=
```

جدول القيم:

[TBL SET] تحدّد بداية الجدول والخطوة المختارة.

حدّد Auto للحصول على الجدول بطريقة آلية.

```
TABLE SETUP
  TblStart = 0
  ΔTbl = 1
Indpnt:  Auto   Ask
Depend:  Auto   Ask
```

X	Y1
0.0	-2.5
1.0	0.0
2.0	ERRROR
3.0	8.0
4.0	10.5
5.0	13.3
6.0	16.3

Y1= - 2.5

المنحني:

[WINDOW] لاختيار النافذة $X\in[-4;3]$ و $Y\in[-3;6]$ مثلاً

[GRAPH] لمشاهدة المنحني على الشاشة.

[TRACE] لقراءة إحداثيات النقط من المنحني.

[ZOOM] 4 : Zdecimal النافذة $X\in[-4.7;4.7]$ و $Y\in[-3.1;3.1]$

تسمح بتتبع المنحني بواسطة اللمسة [TRACE] بخطوة مقدارها 0.1 .

0 : ZoomFit نختار مجال لقيم X وتختار الآلة قيم Y الموافقة.

العدد المشتق والمشتقة

في شاشة الحساب نستعمل [MATH] 8 : nDeriv(.

نحسب العدد المشتق للدالة f عند القيمة 1 . مثال:

فيظهر على الشاشة: $f'(1)=1.9$.

```
nDeriv(Y1,X,1
              1.9
```

كما يمكن إدخال الدالة المشتقة f' عند [Y=] ونحسب مباشرة صورة 1 بالدالة Y_2 .

الحساب التكامل

في شاشة الحساب نستعمل [MATH] 9 : fnInt(.

نحسب التكامل $\int_{-1}^{1} f(x)dx$.

```
fnInt(Y1, X ,-1, 1)
                 -5.09
```

الحساب انطلاقا من المنحني

[CALC] 1 : *value* : نحجز قيمْة للعدد X فنحصل على قيمة $f(X)$ الموافقة.

2 : *Zero* : نحجز طرفي المجال وقيمة مقرّبة لحل المعادلـة $f(x) = 0$ ونصادق، فنحصل على فاصلة نقطة تقاطع المنحني مع حامل محور الفواصل.

3 : min *imum* وَ 4 : max *imum* : نحجز طرفي المجال وقيمة مقرّبة لفاصلة الذروة ونصادق، فنحصل على فاصلة الذروة للمنحني.

6 : dX / dY : نحجز قيمة للعدد X فنحصل على قيمة $f'(X)$ الموافقة.

7 : $\int f(X)dX$: نحجز حدّي التكامل a وَ b ونصادق فنحصل على قيمة التكامل، ونلاحظ على الرسم أن الحيّز يشطّب.

الرسم على المنحني

[DRAW] 3 : *Horizontal* لرسم المستقيم $y = b$ وَ 4 : *Vertical* لرسم المستقيم $x = c$. انطلاقا من شاشة الحساب احجز القيمة b و صادق.

5 : *Tangent*(: نحجز فاصلة نقطة التماس ونصادق فنحصل على رسم للمماس ومعادلته المختصرة.

1 : *ClrDraw* : لإزالة كل الرسومات المنجزة.

2 : *Line*(: لرسم قطعة مستقيمة.

القوائم والاحتمالات

- **الحساب على القوائم**

[STAT] 1 : *Edit* لحجز القائمتين L_1 وَ L_2

لإزالة إحدى القوائم، نضع الزالق فوق اسم القائمة المرغوب إزالتها ثم نضغط على [CLEAR] ونصادق.

L1	L2	L3
0	-1	-------
1	-2	
3	-3	
4	-1.5	
6	-0.5	
8	-2	
10	-1	
L3 =		

لإزالة قيمة من القائمة، نضع الزالق فوقها ثم نضغط على اللمسة [DEL] .

لإضافة قيمة إلى القائمة، نضع الزالق فوق القيمة التي تسبقها ثم نضغط على اللمسة [INS] .

يمكننا حساب مجموع، جداء، القيم في القائمة، كما يمكن حساب صورة القيم في القائمة بواسطة دالة Y . ويكون ذلك بوضع الزالق فوق اسم القائمة ثم نصادق، ونسجل في أسفل الجدول العملية المرغوب إنجازها. مثلاً: $Y_1(L_1) \to L_2$ ونصادق فتظهر صور قيم القائمة بالدالة Y_1 .

كما يمكننا الحساب مباشرة على الشاشة.

لحساب المجموع و الجدا مـثلا لقيم القائمة :

[LIST] [MATH] 5 : *sum*(أو 6 : *prod*(.

حساب الوسيط لقانون الاحتمال

إذا كان قانون الاحتمال معرّف بالثنائية $(x_i ; p_i)$ ،

فإننا نضع القيم x_i في القائمة L_1 ونضع الاحتمالات p_i في القائمة L_2 . نحسب الأمل الرياضي والانحراف المعياري للاحتمال باستعمال اللمسات التالية:

[STAT] *CALC* 1 : / 2 : *Var Stats* L_1 [,] L_2 ونصادق

```
1 - VarStats
X̄ = 4.71
Σx = 4.62
Σx² = 24.50
Sx =
σx = 1.67
↓ n = 1
```

- **المتتاليات**

لتكن المتتالية $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 1}$ ، وَ $u_0 = 2$

في البرنامج [MODE] اختر *Seq* وصادق.

يمكنك حساب حدود المتتالية (u_n) .

وذلك بحجز المتتالية عند [Y=] .

لحجز الحرف n نستعمل اللمسة [X,T,n,] .

```
plot1   plot2   plot3
nMin = 0
u(n)/√(u(n−1)+1
)
u(nMin)/{2}
v(n)=
```

التمثيل البياني لمتتالية

بعد حجز المتتالية وحدها الأول عند اللمسة [Y=] . نعدّل نافذة الرسم باللمسة [Window] .

ونختار *FORMAT Time* ثم اللمسة [GRAPH] . (التمثيل يكون على شكل نقط معزولة)

أو نختار *FORMAT Web* ثم اللمسة [GRAPH] . (التمثيل يستخرج من منحني دالة)

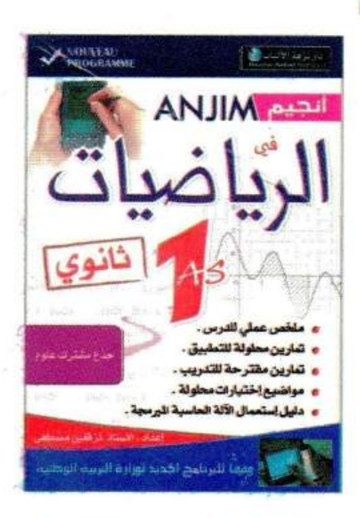
محتويات الكتاب

خطوة... خطوة نحو النجاح

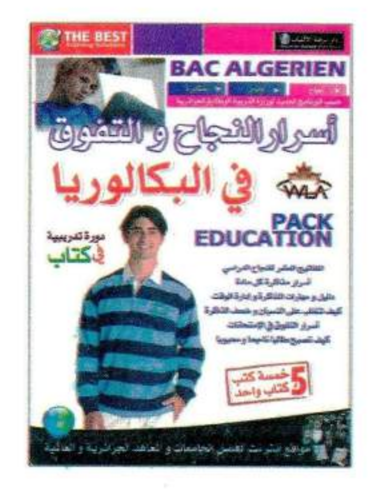
أهداف الكتاب

- يمكن الطالب من الحصول على معلومات محددة و ملخصة.
- يساعد الطالب على تطبيق المعلومات التي تحصل عليها في القسم.
- يدرب الطالب على الاستيعاب الحسن للترسيخ الجيد للمعلومات.
- يحضر الطالب لاجتياز امتحان البكالوريا.









أخي / أختي

إن إستفدت من هذا الملف فالرجاء أن تدع لي و للمؤلف بالخير

و النجاح و المغفرة ☺

Hard_equation